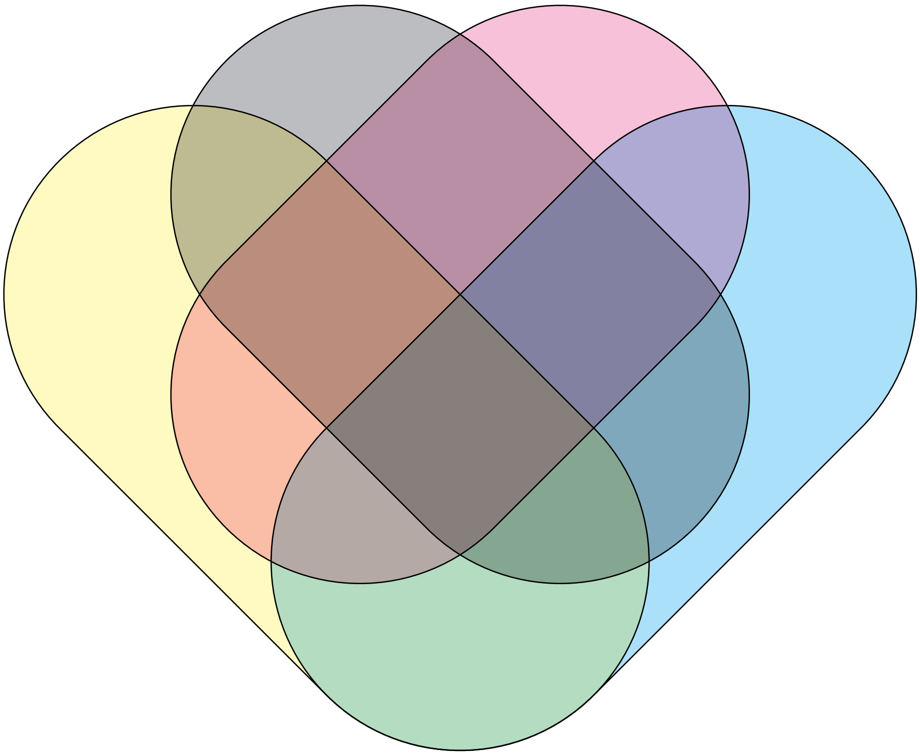
Köves Gabriella – Fülöp Zsolt

Halmazelmélet és logika



Károli Gáspár Református Egyetem Pedagógiai Kar

Halmazelmélet és logika

Köves Gabriella – Fülöp Zsolt

Halmazelmélet és logika

Elméleti összefoglaló és feladatok a tanító- és óvóképzésben részt vevő hallgatók számára

Szerkesztette

Dr. Köves Gabriella

Károli Gáspár Református Egyetem Pedagógiai Kar
Budapest, 2023

A kötet megjelenése a Károli Gáspár Református Egyetem Pedagógiai Karának támogatásával a Neveléstudományi és módszertani kutatások című projekt keretében valósult meg.

Szakmai szerkesztő:
Dr. Köves Gabriella

Szakmai lektor:
Dr. Fried Katalin

Nyomdai előkészítés, tördelés, grafika:
Dr. Fried Katalin

Borítórajz: négy halmaz Venn-diagramja

ISBN 978-615-6637-11-6
DOI 10.5281/zenodo.10479264

© Károli Gáspár Református Egyetem Pedagógiai Kar, 2023
© Dr. Köves Gabriella; Dr. Fülöp Zsolt 2023

A kiadásért felelős
Dr. Pap Ferenc
a KRE PK dékánja

Tartalom

1. Elméleti bevezetés (Köves Gabriella) 6

1.1. Olvasmány 6

1.2. A halmazok és a matematikai logika témakörök megjelenése a jelenkori oktatásban 7

1.3. A halmazok, logika szerepe az iskolai matematikai tevékenységben 9

2. A matematikai logika és a halmazelmélet legelemibb fogalmai (Köves Gabriella) 10

2.1. Kapcsolat a nyitott mondatok, az állítások és a halmazok között 10

2.2. Az állítások logikai értéke 12

2.3. Egy szempont szerinti válogatás 14

2.3.1. Feladattípusok az egy szempontú válogatásokra 16

2.3.2. Az irányított válogatás 17

2.4. Nyitott mondatok 20

2.5. A matematikai fogalmak értelmezése 21

3. Halmaz, elem, eleme fogalmak (Köves Gabriella) 22

3.1. A számhalmazokra használt állandó jelölések 23

3.2. Logikai művelet 26

3.3. Halmazműveletek 27

3.4. Részhalmaz, üres halmaz fogalma 27

4. A tagadás művelete (Köves Gabriella) 30

4.1. Állítások tagadása 30

4.2. Komplementer (kiegészítő) halmaz 32

5. Kvantoros állítások (Köves Gabriella) 33

5.1. Kvantoros állítások tagadása 34

5.2. Az állítások átfogalmazása 35

5.3. Konjunkció – metszet 36

5.4. A Sheffer- és a Zsegalkin-művelet 38

6. Válogatások több szempont szerint (Köves Gabriella) 49

6.1. Két szempontú válogatások előkészítése 50

6.2. Két szempontú válogatás 53

6.3. Az osztályozás 54

6.4. Három szempontú válogatás 55

7. Az elemi ítéletkalkulus és a halmazműveletek műveleti tulajdonságai (Köves Gabriella) 58

7.1. Idempotencia (formális logikai elnevezése: a tautológia törvényei) 58

7.2. Kommutativitás (felcserélhetőség) 58

7.3. De Morgan azonosságok 59

7.4. Asszociativitás (csoportosíthatóság más szóval társíthatóság) . . 62

7.5. Disztributivitás 65

8. Az implikáció és az ekvivalencia (Köves Gabriella) 70

9. Általános iskolai alapfeladatok a fogalom alakítására (Köves Gabriella) 80

9.1. Műveletek halmazokkal 80

10. Összefoglaló feladatok (Fülöp Zsolt) 97

10.1. Bevezetés 97

10.2. A formális logika elemei – Feladatok 98

1. Elméleti bevezetés (Köves Gabriella)

Ez a jegyzet a halmazok–logika témakörben eddig megjelent írásos munkáim kiegészített rendszerező összefoglalása.

1.1. Olvasmány

A Dissoi Logoi az eddigi tudásunk szerint a legrégebbi (K. e. 5. és 4. század fordulója) logikával foglalkozó töredék. A műtöredék a hamisság és az ellentmondás természetével foglalkozik. A logika, mint tudomány a retorika (szónoklattan) és a dialektika (vitatkozástan) gyakorlatából fejlődött tovább. A meggyőző érvelési formák között észrevették, hogy vannak olyanok, amelyekbe bárhogy helyettesítve a szavakat, az érvelés szinte mindig meggyőző. Arisztotelész (Kr. e. 384–322.) görög tudós és filozófus, az érvelés meggyőző ereje helyett a mondatok igazságára, a nyelvtani szerkezetekre helyezte a hangsúlyt a logikai műveinek megírásában.

Így alakult ki a (hagyományos) formális logika. A formális logika első nagy összefoglalása Arisztotelesz Organon című műve volt. A formális logika kezdettől fogva alkalmazott (szorványosan) matematikai módszereket, de nem tartott lépést a matematika fejlődésével.

A XIX. században George Boole (1815–1864), majd Augustus De Morgan (1806–1871) megteremtették a matematika alapvető fogalmainak formalizálását. A formális logika megjelenésének köszönhetően megszülethettek a matematika főbb területeinek (aritmetika, analízis, geometria) axiómarendszerei.

A 1900 után a XIX. század végi munkán alapult Gottlob Frege (1848–1925), Giuseppe Peano (1858–1932), és többek között Georg Cantor (1848–1918) kutatásaik. A különböző kutatási irányokat a szimbolikus (néha matematikai vagy formális) technikák alkalmazására irányuló általános törekvést egyesítette. Fokozatosan ez a kutatás mélyreható változásokhoz vezetett a logikáról alkotott elképzelésben. Létrejötte a modern szimbolikus logika vagy formális logika, később pedig a fuzzy logikák, a kvantumlogika.

A halmazelmélet néhány alapgondolatát a XIX. század elejétől több matematikus egymástól függetlenül már megalkotta. Bernard Bolzano (1781–1848), Richard Dedekind (1831–1916), Georg Cantor, később Gottlob Frege (1848–1925) is ugyanarra az alapötletre épített. Például az azonos számosság fogalmat: a végtelen számosságú halmaz egy valódi részhalmazát bijektív módon képezik le magára a halmazra. (A bijekció megfeleltetés két nem feltétlenül különböző halmaz között olymódon, hogy az egyik halmaz minden elemének megfeleltetjük a másik halmaznak pontosan egy elemét, és fordítva is. Lásd később)

Cantor egyetemi éveiben barátságot kötött Hermann Amadeus Schwarzcal, 1872-ben Richard Dedekinddel. Ekkortól kezdett foglalkozni végtelen számosságú halmazok elemeinek sorbarendezésével, összehasonlításával. 1874-ben a Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik című folyóiratban jelentette meg azt a cikket, amelyet ma a modern halmazelmélet születésének tekintünk.

1930-ban két kiváló matematikus Hans Rademacher és Otto Toeplitz középiskolás diákoknak írt egy könyvet, „Von Zahlen und Figuren" címen, amelyben szerepelt egy fejezet a halmazelméletről. Talán ez volt az első, nem csupán matematikusoknak szóló tankönyvnek is használt könyv, amelyben már szerepelt a halmazelmélet. Magyarul 1954-ben adta ki a T ankönyvkiadó mindössze 1000 példányban, de így is nagy hatással volt a matematikusokra, a matematika tanárokra egyaránt.

Az ötvenes években világszerte számos pedagógus, pszichológus hangoztatta, hogy a matematikaoktatás nem felel meg a kor tudománya és technikája által támasztott követelményeknek.

1957-ben nagy lendülettel megindult a matematikatanítás megreformálására irányuló New Math mozgalom. Négy, területileg is elkülönülő színtere alakult ki: az Egyesült Államokban, a nyugat-európai államokban, Angliában és a Szovjetunióban.

Az UNESCO támogatásával 1962-ben Nemzetközi Matematikatanítási Szimpóziumot rendeztek Budapesten. A tanácskozás hatására az Országos Pedagógiai Intézet keretein belül Varga Tamás irányításával megkezdődődött a komplex matematikatanítási kísérlet. Ekkor határozódott meg, hogy az új magyar matematika oktatást halmazelméleti alapokra építik, ez első osztálytól kezdve a 12-ig. A komplex matematikatanítást az 1978-as tantervvel vezették be országosan.

1.2. A halmazok és a matematikai logika témakörök megjelenése a jelenkori oktatásban

Egymással szoros analóg kapcsolatban főleg a „Gondolkodási módszerek" címszó alatt összefoglalt követelményekhez kapcsolódó anyagrészekben jelenik meg a halmazok és a matematikai logika témakörök Leibniz, Boole, De Morgan és Frege munkásságának következtében

Ugyanakkor megjelenik mindegyik nagy témakör feldolgozásában is (számtan–algebra, relációk– függvények–sorozatok, geometria–mérések, kombinatorika–valószínűség–statisztika) Egy-egy témakörön belül pedig szerepelhetnek az ismeretelsajátítás előkészítő szakaszában, az aktuális tananyag feldolgozásában, a tanultak megszilárdításában, begyakoroltatásában, akkor, amikor a tanultakat a tanuló matematikai műveltségébe beépítjük, és akkor is, amikor a tanultakat ismételjük.

Már az óvodában és az alsó tagozaton, de később is arra törekszünk, hogy halmazszemléletet alakítsunk ki a tanulókban úgy, hogy a megtapasztalt fogalmakat, a halmazműveleteket eszközként tudják használni majd az összes matematikai témakörben a feladatok megoldásához, az új ismeretek kialakításához, beépítéséhez. Mindezzel fejlesztjük a gondolkodási képességeket, melyeknek birtokában ugyanezeket a műveleteket képesek lesznek alkalmazni a nem kifejezetten matematikai tevékenységekben és nem okvetlenül iskolai körülmények között.

Kezdetben, már az iskolás kor előtt is a vizuális, auditív, kinesztetikus érzékelést, észlelést fejlesztő játékokkal tudatosítjuk a megfigyeltetni kívánt tulajdonságokat, és közben fejlesztjük a gyermekek szóbeli, mimikai, tárgyi tevékenységbeli kifejezőképességét, a figyelem koncentrációját, tartósságát. A tárgyak különböző látható, tapintható, hallható tulajdonságait ismertetjük fel egymástól elkülönítve. Például a tárgyakat megkülönböztetjük tömegük, térfogatuk alapján vagy a felületük érdessége, simasága, folytonossága alapján vagy az alakjuk (domború, homorú, szögletes, sík stb.), a színük, esetleg a hangjuk, a hangszínük alapján. A tevékenységek kapcsán tudatosulnak a tárgyak, élőlények különböző tulajdonságai, ami alapja lesz a későbbi összehasonlításoknak.

Az ismeretszerzésnek ebben a periódusában hatékonyan tudjuk alkalmazni az érzékelést fejlesztő játékokat.

Másoló játékok például: rakd ki ugyanazokat az elemeket; építsd fel ugyanazt az alakzatot; végezd el ugyanazt a mozdulatsort, dobbants, tapsolj stb. ugyanannyit, mint valaki más; tapsold vissza ugyanazt a ritmust, énekeld el ugyanazt a dallamot stb.

Kitalálós játékok például: Az ismert tárgyak közül egyet elrejtünk, a tanulónak ki kell találnia, melyik ez a tárgy. Egy műanyag betűt, számot beteszünk egy zsákba, vagy letakarunk egy kendővel. A gyermek feladata – anélkül, hogy látná az elrejtett tárgyat – a hiányzó tárgyakból következtetve vagy tapintással kitalálni, melyik tárgyat rejtettük el. Vagy a hallott hangok közül ki kell találni, hogy kinek vagy minek a hangját hallottuk.

Változtatós játékok például: Néhány elemű halmaz egyik elemét kicseréljük egy másikra. A feladat kitalálni, hogy melyik tárgyat melyikkel cseréltük ki. Ugyanennek a játéknak egy másik változata, amikor az elemek sorrendjét változtatjuk meg. Ekkor a feladat lehet a változás megjelenítése és/vagy az eredeti sorrend visszaállítása.

1.3. A halmazok, logika szerepe az iskolai matematikai tevékenységben

Előfordulhat, hogy egyetlen óvodai foglalkozáson, illetve egyetlen tanórán sem lesz fő téma a halmazelmélet és/vagy a logika, de példaanyaga át- meg átszövi a teljes óvodai matematikai nevelést, az általános iskolai tananyagot, és nem csupán a matematikait. Ezért igen nehéz meghatározni, hogy a matematikaóráknak hány százalékát fordítjuk ennek a témakörnek az elsajátítására, alkalmazására az egyes évfolyamokon.

Az iskolában matematikai logika megjelenhet már az első osztálytól kezdve a kijelentések logikai értékének vizsgálatával, az állítások logikai értékének meghatározásával (igaz, hamis állítások); egy-, illetve kétváltozós nyitott mondatok (logikai függvények) megoldásával; kvantorokkal képzett kijelentések értelmezésével.

Az állításokkal végzett műveletek: például az állítások tagadása, átfogalmazása, összekapcsolása (a „logikai és" (konjunkció), a „logikai vagy" (diszjunkció) műveletek alkalmazása) segítik nemcsak a matematikai fogalmak, hanem a köznyelvi kifejezések pontos használatát is.

A halmazok és a matematikai logika szoros kapcsolatuk miatt elválaszthatatlanok egymástól, így a halmazok is megjelennek már az óvodás korban, de előtte is a családi nevelés kezdetén. Az iskolai tananyagban a halmaz fogalmát mindegyik témakörben felhasználjuk. Például a számtan-algebrában már a számlálásnál, a természetes szám fogalmának értelmezésénél, a mennyiségek mérőszámának meghatározásánál, az alapműveletek bevezetésénél. A relációk, függvények témakörben a relációk értelmezésében, a halmaz-részhalmaz viszony felismerésében, értelmezésében, a geometriai témakörökben a ponthalmazok vizsgálatakor. A kombinatorika, valószínűség, statisztika témakörök sem nélkülözik a halmazszemléletet.

Ajánlott irodalom

Hans Rademacher–Otto Toeplitz (2009) Számokról és alakzatokról, Bevezetés a halmazelméletbe 69–80. o., Typotex Elektronikus Kiadó Kft, Budapest

2. A matematikai logika és a halmazelmélet legelemibb fogalmai (Köves Gabriella)

A matematika fejlődésével szükségessé vált számos fontos, a matematika alapjaival kapcsolatos kérdés tisztázása.

Ilyen kérdések lehetnek:

Milyen állításokat fogadunk el a matematikában?

Mikor nevezünk igaznak egy állítást?

Mi a definíció? Mikor jó egy definíció?

Milyen definiálási módokat fogadunk el a matematikában?

Mi a bizonyítás? Jó-e a bizonyítás?

Milyen bizonyítási eljárásokat fogadhatunk el a matematikában?

Ellentmodásmentes-e valamely matematikai rendszer felépítése?

(Ellentmondásos a rendszer, ha található benne olyan állítás, amelynek az igazságát az adott rendszerben be tudjuk bizonyítani, de az állítás tagadásáról is bizonyítható, hogy igaz.)

Az ilyen típusú problémák megoldásában hasznos eszköznek bizonyult a matematikai logika, amely a matematika eszközeivel írja le a logikus gondolkodás törvényszerűségeit. Az előző olvasmányból látható, hogy a hagyományos formális logika és a matematikai logika lényegében ugyanaz a tudomány, az utóbbi az előbbinek a továbbfejlesztése.

A matematikai logika nem vállalkozik általában a gondolkodás törvényeinek feltárására, sem az emberi gondolkodás filozófiai problémáinak elemzésére. Ezek a kérdések a szélesebb értelembe vett logika, illetve filozófia körébe tartoznak. A továbbiakban logikán mindig matematika logikát fogunk érteni.

2.1. Kapcsolat a nyitott mondatok, az állítások és a halmazok között

A jegyzet szerkezetének, a fogalmak egymáshoz kapcsolódásának megértéséhez először elemezznük egy feladatot.

A baráti társaságnak kilenc tagja van: Anna Béla, Cili, Dénes Elemér Fanni Gabi Hugó és Ilona.

Közülük az egyetemünkre jár Dénes, Fanni, Hugó és Ilona.

Ha az előző mondatot nem ismerjük, akkor a „ Ki az, aki a baráti társaság tagjai közül egyetemre jár?” kérdésre úgy tudunk válaszolni, hogy a társaság minden tagjától megkérdezzük, hogy ő az egyetemünkre jár-e.

Az A baráti társaság tagja a mi egyetemünkre jár. nyitott mondatra adott válaszból fogjuk tudni hogy ki jár a mi egyetemünkre és ki nem.

Azért tekintjük ezt a mondatot nyitott mondatnak, mert az eljárás kezdetén még rejtély számunkra, hogy ki jár a mi egyetemünkre és ki nem.

Helyettesítsük be „a baráti társaság tagja” helyére egy-egy nevet a baráti társaság tagjai közül.

a) Anna a mi egyetemünkre jár.

b) Béla a mi egyetemünkre jár.

c) Cili a mi egyetemünkre jár.

d) Dénes a mi egyetemünkre jár.

e) Elemér a mi egyetemünkre jár.

f) Fanni a mi egyetemünkre jár.

g) Gabi a mi egyetemünkre jár.

h) Hugó a mi egyetemünkre jár.

i) Ilona a mi egyetemünkre jár.

Kilenc állítást kaptunk. Ezekről az állításokról egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy ki jár az egyetemünkre és ki nem, azaz melyik igaz állítás, és melyik nem az, azaz hamis. Másként fogalmazva meg tudjuk határozni az állítások logikai értékét. (Lásd később.)

Igaz állítások: *d) f) h) i)*. Hamis állítások: *a)*, *b)*, *c)*, *e)*, *g)*.

Ugyanakkor a baráti társaság tagjait tekinthetjük egy halmaz elemeinek. Hívjuk ezt most B halmaznak.

A B halmaz elemei: Anna Béla, Cili, Dénes, Elemér, Fanni, Gabi, Hugó és Ilona.

Az E halmazba pedig azok tartozzanak, akik a társaságból a mi egyetemünkre jár.

Az E halmaz elemei: Dénes, Fanni, Hugó és Ilona. Pontosan azok tartoznak ide, akikről igaz állítás, hogy a mi egyetemünkre jár.

Ha azt kérdezzük, hogy „a baráti társaság tagjai közül ki jár a mi egyetemünkre”, akkor a válaszban pontosan az E halmaz elemeit kell felsorolnunk.

Mondhatjuk, hogy a nyitott mondatunk igazsághalmaza az E halmaz. Azaz az alaphalmaznak azok az elemei alkotják az igazsághalmazt, amelyek igazzá teszik a nyitott mondatot. Az igazsághalmazt szokták megoldáshalmaznak is nevezni.

Mi a kapcsolat a nyitott mondat és az állítás között?

> Ha a tárgyalásban lévő elemeket egyenként behelyettesítjük a nyitott mondatba, állításokat kapunk.

Mi a kapcsolat az állítás és az igazsághalmaz között?

> A tárgyalásban lévő igaz állítások összessége az igazsághalmaz.

Ezen gondolatmenet általánosításával eljuthatunk oda, hogy ekvivalensnek (egyenlő értékűnek) tekintjük a matematikai logika fogalmait, azonosságait a halmazelmélet fogalmaival, azonosságaival. (Lásd később.) Ebből viszont az következik, hogy a matematika logikában bizonyított tételek igazak a halmazelméletben és fordítva is, a halmazelméletben bizonyítottak igazak a matematika logikában.

Tehát, ha a matematika logikában bizonyítottunk egy tételt, akkor tekinthetjük a halmazelméletben is bizonyítottnak az annak megfelelő tételt.

Ennek okán megtehetjük, hogy a matematikai logika alapjait párhuzamosan tárgyaljuk a halmazelmélet alapjaival.

2.2. Az állítások logikai értéke

Állításainkat kijelentő mondatokban fejezzük ki. Ezek lehetnek igazak, de lehetnek nem igazak, azaz hamisak is.

Egy kijelentő mondattal kapcsolatban az „igaz”-at, a „hamis”-at a mondat logikai értékének nevezzük.

Igaz állítás: Az 5 nagyobb, mint a 3. Ennek az állításnak a logikai értéke: „igaz”.

Nem igaz állítás: Az 5 osztható 3-mal. Ennek az állításnak a logikai értéke: „hamis”.

(A kérdő, a felszólító és az óhajtó mondatok nem lehetnek ítéletek, mivel nincs értelme azt vizsgálni, hogy igaz-e vagy sem egy ilyen mondat. Például: Tanuld meg a logikát! felszólításnak nincs logikai értéke.)

Megfogalmazhatunk olyan kijelentő mondatot is, amelynek nincs logikai értéke, vagyis amelyről nem tudjuk vagy nem akarjuk eldönteni, hogy igaz-e vagy sem.

Ilyen állítás például: Az 5 szebb, mint a 3.

Azokat a kijelentő mondatokat, amelyekről egyértelműen eldönthetjük, hogy van-e logikai értékük, kijelentéseknek, vagy állításoknak vagy ítéleteknek nevezzük.

Definíció. Ítéletnek nevezzük azt a kijelentést, amelynek van logikai értéke, vagyis amelyről az adott tárgyalásban egyértelműen eldönthető, hogy igaz-e vagy sem.

A harmadik kizárásának elve, illetve az ellentmondásmentesség elve alapján egy adott tárgyalás során egy ítélet vagy igaz, vagy hamis, tehát nem lehet más logikai értéke, illetve nem lehet igaz és hamis is egyszerre.

Jelölések. Az ítéleteket a matematikai logikában általában nagybetűkkel jelöljük.

Az „igaz” logikai értéket (az általános iskolai gyakorlattal összhangban) **i** vagy **I**; a „hamis” értéket **h** vagy **H** betűvel jelöljük.

Példa. Igaz-hamis állításokkal már óvodás korban is foglalkozunk. Gondoljunk a következő csúfolódó mondókára (népdalra):

Dolgozzatok, legények,
Holnap lesz a vásár,
Kifizetlek benneteket,
Ha eljön a császár.
Repül a, repül a...

A gyermekek ritmusra egy-egy ujjukkal ütik az asztalt. A mondóka végén a játékvezető, aki szintén ugyanúgy mozgatja az ujját, mond egy élőlényt vagy tárgyat, például „fecske”. Ha valóban repülni tud az, amit kimondott, akkor a gyermekeknek fel kell emelni a kezüket, ha azonban nem repül, mint például a „kecske”, akkor mindenkinek az asztalon kell tartani a kezét.

Példa. Mondj 3 igaz és 3 hamis állítást a 10 számról!

Igaz állítások például „A 10 páros szám.” „A 10 kisebb, mint a 20.” „A 10 osztható 2-vel.”

Hamis állítások például „A 10 osztható 6-tal.” „$10 > 12$.” „A 10 egyjegyű szám.”

2.3. Egy szempont szerinti válogatás

Melyik tárgy kerül a tálba, és melyik a vázába.	

Hajdu: Gondolkodni jó 1. osztály

Ebben a feladatban el kell dönteni, hogy igaz-e, hogy az almát (banánt, hóvirágot stb.) a tálba tesszük. Ha igaz, a tálba tesszük, ha hamis, a vázába. Ettől eltérő eset nincs. Azaz nincs olyan tárgy, amelyet a tálba és a vázába is tesszük, illetve olyan sincs, amelyet egyik helyre sem tudjuk tenni. Az ilyen válogatásokat szoktuk egy szempont szerinti válogatásnak is nevezni.

Matematikai értelemben *az A halmaz egy osztályozását kapjuk, ha fel tudjuk bontani páronként diszjunkt halmazokra*. Másként fogalmazva: a halmazt úgy bontjuk fel részhalmazokra, hogy ezekben a részhalmazokban a halmaz összes elemét el tudjuk helyezni, ugyanakkor egyetlen egy elem sem kerülhet két részhalmazba.

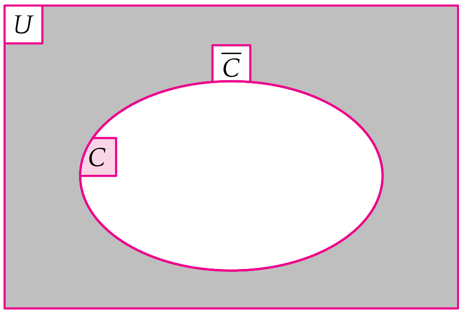
Kezdetben az adott halmaz elemeit két osztályba soroljuk. Az egyik osztályba kerülnek az adott tulajdonsággal rendelkező elemek, a másikba a többi elem, azaz amelyek *nem* rendelkeznek az adott tulajdonsággal. Tulajdonképpen az adott halmazon belül kiemelünk egy tulajdonságot (részhalmazt), és meghatározzuk annak a tulajdonságnak a „nem meglétét” (más szóval az állítás tagadását, vagy komplementerét) is. Például az osztály tanulói közül kiválasztjuk a fiúkat; a logikai készlet elemeiből a lyukasakat; az adott egész számok közül a párosakat; az ábécé betűiből a mássalhangzókat; az adott alakzatok közül azokat, amelyeket csak egyenes vonal határol stb. Sok-sok ilyen típusú feladatot találhatunk, nemcsak a matematika tankönyvekben.

Az elemek két osztályba sorolásával a tanulók tapasztalatot szereznek egyrészt két halmaz egyenlőségéről, például: Jani, Feri, Sanyi menjenek először kezet mosni. Ugyanezt az állítást (halmazt), jelöljük ki, ha a neveket más sorrendben soroljuk föl. Másrészt egy halmaz és komplementerének az előállításáról és ezzel párhuzamosan egy állítás tagadásáról (amely analóg művelet egy halmaz komplementerének meghatározásával).

Példa. Az osztály tanulói közül a napközisek elmentek ebédelni. A többiek az osztályban maradtak. Add meg a monogramjukkal, hogy kik maradtak az osztályban

– az elemek felsorolásával,

– az elemek tulajdonságának meghatározásával!



Megjegyzés. Amikor a komplementer halmaz ($\overline{C}$) elemeinek közös tulajdonságát határozzuk meg, akkor egy állítás tagadását végezzük: A C halmaz elemei a napközis gyerekek. A C halmaz komplementerébe a *nem* napközis gyerekek tartoznak.

A válogatáshoz kapcsolódó tevékenység lehet tárgyi manipuláció, például a logikai készlet elemeit rakosgatással csoportosítjuk, de végezhetjük papíron rajzolással, ragasztással, színezéssel. Az összetartozó elemeket összeköthetjük vonalakkal vagy bekarikázhatjuk. A tevékenység megválasztását befolyásolja az adott matematikai téma, a gyermekek fejlettségi szintje. Ugyanazt a feladatot más-más tevékenységgel oldhatják meg a különböző fejlettségi szinten álló tanulók. A tiszta fogalomalkotás érdekében fontosnak tartjuk, hogy az egy szempontú válogatáshoz se csupán egyfajta tevékenység kapcsolódjon.

1. Feladat. Az adott síkidomok közül válogasd ki azokat, amelyeket

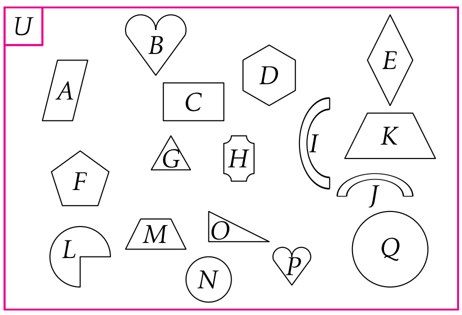
a) határol egyenes vonal: . . . . ;

b) csak egyenes vonal határol: . . . . ;

c) négy egyenes vonal határol: . . . . ;

d) legalább négy egyenes vonal határol: . . . . !

Írd a megfelelő betűket a pontozott vonalra!



Megoldás.

a) határol egyenes vonal: $A, V, C, D, E, F, G, H, K, L, M, O, P$;

b) csak egyenes vonal határol: $A, C, D, E, F, G, K, M, O$;

c) négy egyenes vonal határol: A, C, E, K, M;

d) legalább négy egyenes vonal határol: A, C, D, E, F, K, M!

2.3.1. Feladattípusok az egy szempontú válogatásokra

A válogatás szempontját meghatározhatja a válogató, azaz válogatást végzünk saját, más szóval választott szempont szerint.

Már az óvodában, az első osztályban az alapozó időszakban is fontos ez a tevékenységi forma. Nem csupán a matematikai fogalmak előkészítése szempontjából tartjuk fontosnak, hanem a kreativitás, a gondolkodás rugalmasságának fejlesztése érdekében is. A feladat megoldásához a tanulóknak első lépésként meg kell határozniuk a megadott elemek (halmaz) egy csoportját (részhalmazát) többnyire ezen elemek közös tulajdonságával. Ezen áll vagy bukik a megoldás sikeressége. A második lépés – általában ez bizonyul könnyebbnek – az elemek elhelyezése ebbe a részhalmazban. A megoldások megbeszélésekor megtapasztaltathatjuk, hogy a dolgok többféleképpen is rendszerezhetők. A kreatívabb tanulók ugyanazt a halmazt rendezhetik újra, mindig más-más szempont szerint.

Megjegyzés. Általában nem szükséges, hogy egy halmazba közös tulajdonságuk alapján rendezzük az elemeket. Egy halmazba tartozhatnak olyan elemek, amelyeknek nincs közös tulajdonságuk (azon kívül, hogy egy halmazba soroltuk őket). Ha azonban megnevezzük a halmazt, például a piros elemek, a páratlan számok, vagy a paralelogrammák, akkor a halmazba csak a cimkének (megnevezésnek) megfelelő elemek kerülhetnek.

Bőséges a válogatásra választható tárgyak száma és a válogatás szempontjai. Válogathatunk terményeket például fajtájuk, méretük, színük, alakjuk szerint, de szubjektív szempontok is szóba jöhetnek (tetszik, szeretem stb.). Vagy válogathatunk kártyákat a rajtuk szereplő ábrák szerint; dominót a pöttyei száma, a pöttyeinek összege, különbsége vagy ezek oszthatósága, a pöttyökből képzett kétjegyű számok valamilyen tulajdonsága szerint; logikai készlet elemeit színük, alakjuk, méretük szerint; számokat, szavakat (szám- és szókártyákat) valamely tulajdonság szerint.

A játékok közül ide sorolhatjuk a meghatározós játékokat, azaz az olyan játékokat, amelyekben a feladat adott válogatásról a felismert közös tulajdonság meghatározása verbálisan vagy tevékenységgel; az összehasonlító játékokat, amikor az összehasonlítás szempontjából lényeges és lényegtelen tulajdonságok elkülönítése a feladat; a *barkochbát*, amikor az eldöntendő kérdéseikre kapott igen-nem válaszokból következtetnek egy kigondolt dologra. A barkochbának több fajtáját is alkalmazhatjuk: a *néma barkochbá*t, amikor a halmaz elemeinek a csoportosításával kell kitalálni a gondolt elemet; a *válogatós barkochbá*t, amikor egy-egy kérdésre adott válasz alapján csoportosítják az elemeket mindaddig, amíg ki nem találják a gondolt elemet; a relációs barkochbát, amikor a halmazból kiválasztott két-két elem alapján kell meghatározni a közös tulajdonságot; a hagyományos barkochbát, amikor már az elemek ismerete nélkül, a kérdésekre adott igen-nem válaszok alapján kell kitalálni, hogy mire gondoltunk – ennek a barkochbának ismert az igazmondós és a hamismondós változata is.[1]

2.3.2. Az irányított válogatás

A válogatásnak ebben a formájában a válogatás szempontját előre megadjuk, ezért nevezzük irányított válogatásnak. A feladat megoldása a fogalomalakítás szempontjából kétféle célt szolgál. Egyrészt segítheti a célzott fogalom kialakítását, másrészt visszajelzést ad arról, hogy a megoldó milyen mértékben sajátította el, építette be az adott fogalmat a már meglévő ismereteinek rendszerébe.

A szempont megadása többféle formában történhet. Szóban vagy írásban megfogalmazzuk a szempontunkat, de megadhatjuk tevékenységgel is úgy, hogy megkezdjük a válogatást, és ennek alapján kell azt a többi elemmel folytatnia a tanulónak.

Az egy szempontú válogatások közül általában a saját szempont szerintit végezzük el a legkönnyebben, itt általában a nehézség a saját szempont megfogalmazásában van. Ennél kissé nehezebbnek tűnik a *megadott szempont* szerinti válogatás. Ezek közül pedig a megkezdett válogatás folytatása a legnehezebb, azért, mert ebben az esetben először meg kell találni a válogatás szempontját (vagy szempontjait), azt a tulajdonságot, amely szerint elkezdődött a válogatás, majd meg kell keresni a megfelelő új elemeket a válogatás folytatásához.

Amennyiben tevékenységgel adjuk meg a válogatás szempontját, a tanulók feladata a közös tulajdonság meghatározása. E tulajdonság alapján fogják eldönteni,

[1] Részletes játékleírások találhatók Makara Ágnes (2003): Matematika és módszertana óvodapedagógusok számára – Halmazok, logika, kombinatorika, valószínűség (ELTE TÓFK) című könyvében

hogy mely elemek kerülnek a csoportba (halmazba). A feladat megoldását kérhetjük tevékenységgel, azaz a további elemek szétválogatásával (rakosgatással, rajzolással, szóban vagy írásban), a közös tulajdonság verbális meghatározásával, azaz *címkézéssel*, vagy mindkettővel. Ez utóbbi esetben el kell döntenünk, hogy melyiket kérjük előbb. A tevékenység elvégzésével és meghatározásával a jobb és bal agyféltekés gondolkodás közötti „átjárást” is gyakoroltatjuk.

Az ilyen típusú feladatok megoldásának száma függ a szóba jöhető tulajdonságok számától és a kiválogatásban megadott elemek számától is. A gondolkodás rugalmasságának fejlesztése szempontjából hatékonynak tekintjük azokat a feladatokat, amelyeknek egy-egy tanuló vagy tanulócsoport a feladatnak több megoldását is megadhatja.

Amennyiben egy fogalom megértésére, kialakítására, elmélyítésére vagy ellenőrzésére fókuszálunk, célszerűbb olyan feladatot megoldatni, amely az adott fogalom szerinti csoportosítást követeli meg. (A feladatban megadott számok számköre kijelöli meghatározza a legalacsonyabb évfolyamot, ahol a feladatot már megoldathatjuk.)

A következő feladattípus a számkör változtatásával alkalmazható mind az 1–4. évfolyamon, sőt a későbbiekben is.

Példa. A megadott 0; 3; 7; 15; 20; 30; 40; 72; 9; 32 számok közül valamilyen szempont alapján már kiválasztottuk:

– A 0-t és a 3-at. Folytasd a válogatást! 0, 3, ...

  Mely számokat válogattad ki?

  Jó válasz lehet például

  a) a három többszöröseit válogatjuk,

  b) az egyjegyű számokat válogatjuk,

  c) azokat a számokat válogatjuk ki, amelyekben szerepel a 0, vagy a 3.

  Mely számokat nem válogattad ki?

  a) Azokat a számokat, amelyek nem oszthatók 3-mal,

  b) a több jegyű számokat, ebben az esetben mondhatjuk, hogy a kétjegyű számokat, mivel nincsennek kettőnél többjegyű számok,

  c) azokat a számokat, amelyekben nem szerepel a 0 vagy a 3.

– A 20-at és a 32-t. válogattuk ki. Folytasd a válogatást! 20, 32, ...

  Mely számokat válogattad ki?

  Jó válasz lehet például:

a) azokat, amelyek oszthatók 4-gyel,

b) azokat, amelyek 3-mal osztva 2-t adnak maradékul,

c) azokat a számokat, amelyek nagyobbak mint 15, vagy 16, vagy 17 vagy 18, vagy 19,

d) azokat a számokat, amelyek kisebbek, mint 32. Stb.

Mely számokat nem válogattad ki?

a) azokat, amelyek nem oszthatók 4-gyel,

b) azokat, amelyek 3-mal osztva 0-t vagy 1-et adnak maradékul,

c) amelyek kisebb vagy egyenlő mint 15, vagy 16, 17, 18, 19,

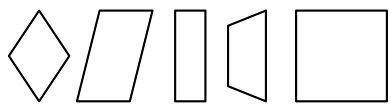
d) nagyobb vagy egyenlő mint 32.

– A 0-t és a 20-at. Folytasd a válogatást! 0, 20, ...

A válogatást folytathatjuk például úgy is, hogy a 20 többszöröseit soroljuk fel, vagy úgy is, hogy a kerek tízeseket válogatjuk ki a megadott számok közül.

Az előre megadott szempont szerinti válogatás egy speciális esete amikor az elemek között van oda nem illő. Ekkor a feladat az oda nem illő elem megkeresése. Ezek a „kakukktojás” típusú feladványok. A több azonos tulajdonságú elem közül kell kiválasztani azt vagy azokat, amelyek nem rendelkeznek ezzel az egy tulajdonsággal. Egy konkrét fogalom alakításához célszerű, ha csupán egy tulajdonság alapján térnek el a tárgyak.

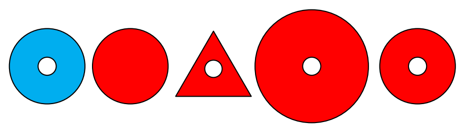
Példa. Melyik alakzat nem illik a többi közé?



A negyedik, mert a többi alakzatnak két pár párhuzamos oldala van, ennek pedig csak egy pár.

Ha a tárgyakat úgy válogatjuk össze, hogy egy-egy tárgynak a tulajdonsága másmás szempontból eltér a többi elemétől, akkor több megoldása lesz a feladatnak. A gyermekek gondolkodásának rugalmasságát fejleszthetjük azzal, hogy újabb és újabb szempontot kell találniuk.

Példa. A logikai készletből kiválogattunk 5 elemet.



Melyik alakzat nem illik a többi közé?

Az elemeket csoportosíthatjuks: Szín szerint, ebben az esetben balról az első elem a kakukktojás, mert ez kék, a többi piros. Ha lyukasság szerint csoportosítunk, akkor ebben az esetben balról a második elem nem illik a sorba, mert ez az egy nem lyukas. Alak szerint csoportosítás esetén a háromszög nem illik a körök közé. Ha pedig méret szerint csoportosítunk (kicsi, nagy), akkor a jobbról a második elem, a nagy kör nem illik a kicsi elemek közé.

Válogasd ki, hogy melyik tárgyon halad át a fény, melyiken nem!	1. ablaküveg 2. függöny 3. tolltartó 4. papír törlőkendő 5. celofán 6. fehér műanyag palack 7. széktámla 8. füzet 9. napszemüveg

Példa az egy szempontú válogatásra egy környezetismeret tankönyvből. Nem lesz egy szempontú válogatás, ha azt kérdezzük, hogy melyek azok, amelyeken teljesen-, részben- egyáltalán nem halad át a fény.

2.4. Nyitott mondatok

A matematikában fontosak azok a vizsgálatok, amelyek során jól meghatározott dolgok összességéről döntjük el, hogy mely dolgokra igaz, illetve mely dolgokra hamis egy adott állítás.

Példa.

a) Az n osztható 3-mal (az n 20-nál kisebb természetes szám).

b) ... a Károli Gáspár Református Egyetem hallgatója.

c) $x + 3 = 2x - 4$ (az x racionális szám).

A fenti példákban az alany helyén kipontozással, illetve betűvel (az alsó tagozatos taneszközökben esetleg kerettel, kis szimbólummal, később betűvel) jelölt változó áll, ezért ezek az állítások nem ítéletek, hiszen nincs logikai értékük.

Ha az *a)* példában az n helyére különböző 20-nál kisebb természetes számokat írunk, akkor ítéleteket kapunk, amelyeknek egyértelműen eldönthető a logikai értékük:

A 12 osztható 3-mal (Igaz.)

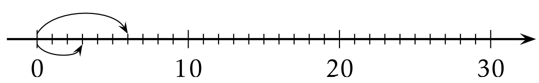
A 0 osztható 3-mal. (Igaz.)

A 14 osztható 3-mal. (Hamis.)

b) Ha a szóba jöhető személyek csoportját nézzük egyesével, akkor el lehet dönteni, hogy egy-egy személyre igaz, vagy hamis-e az állítás.

A *c)* olyan nyitott mondat, amelyben két kifejezést az egyenlőségjel kapcsol össze. Az ilyen nyitott mondatot egyenletnek nevezzük. Tehát az egyenlet (egyenlőtlenség) is nyitott mondat, de nem minden nyitott mondat egyenlet (illetve egyenlőtlenség).

Példa (nyitott mondatra)**.** 2. osztályos feladat, a hatos szorzótábla bevezetésére. Ugyanakkor a feladat tapasztalati úton megmutatja a 6-os és a 3-as szorzótábla kapcsolatát is.

A 0-ról indulva hat ugyanakkorát lépünk a számegyenesen. Hová érkezünk? Folytasd a rajzolást! Írj róla szorzást!	

Azaz azt kell eldönteni, hogy az n természetes szám ($0 < n \leq 50$) szám osztható-e 6-tal, illetve 3-mal.

2.5. A matematikai fogalmak értelmezése

Egy fogalmat általában úgy értelmezünk – definiálunk –, hogy már ismert fogalmakra vezetjük vissza.

a) Példa a fogalmak nem matematikai szigorúságú értelmezésére

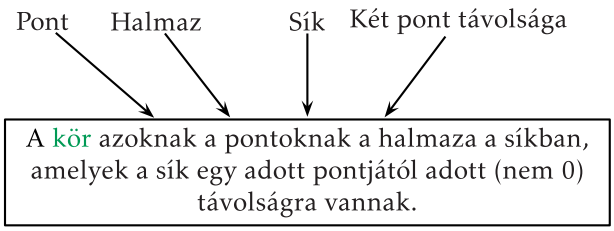
Tárgy:
az a dolog, amelyre
valamely gondolati
tartalom vonatkozik

$\rightleftarrows$

Dolog:
szabatosan meg nem nevezett
tapasztalati, képzeleti vagy gondolati
tárgy.

Észrevehető a „hamis kör” (tautológia). Az egyik fogalmat a másikkal, a másikat az egyikkel határoztuk meg.

b) Példa egy matematikai fogalom értelmezésének logikai szerkezetére



Kövessük néhány lépésben az egymást értelmező fogalmak (egyik) láncát:

Egyenes → szakasz → két pont távolsága → kör

Mivel véges számú fogalmat ismerünk, ez a fogalomlánc valahol elkezdődik (ha nem tautológia). Következésképp minden matematikai rendszer felépítése során meg kell egyeznünk abban, hogy melyek azok a legegyszerűbb fogalmak, amelyeket nem kívánunk (vagy nem tudunk) definiálni. ezeket a fogalmakat alapfogalmaknak nevezzük.

Például a geometriában ilyen alapfogalmak lehetnek: pont, egyenes, sík.

A rendszer többi fogalmát az alapfogalmak vagy már korábban definiált fogalmak segítségével értelmezzük. Ez az „építkezés" – ha nem követünk el logikai hibát – kizárja a tautológiát is.

3. Halmaz, elem, eleme fogalmak (Köves Gabriella)

Már az óvodás kortól kezdve alapozunk, konkrét feladatok kapcsán használjuk a „halmaz", az „elem", az „eleme" fogalmakat. A naiv halmazelméletben, ezen fogalmakat nem definiáljuk. Ezek alapfogalmak.

A halmazelmélet nem definiált alapfogalmi:

a halmaz,

az elem és

annak a kapcsolatnak a fogalma, hogy egy elem beletartozik egy halmazba, azaz eleme-e a halmaznak.

Nem az elnevezések bevésésére helyezzük a fókuszunkat. Van úgy, hogy egy-egy halmazelméleti probléma megoldásakor a halmaz szó el is hagyható vagy más szóval helyettesíthető. Például az adott „kosárban lévő almák" vagy „a 10-nél kisebb természetes számok" megfogalmazás a „halmaz" szó nélkül is ugyan úgy értelmezhető, mint a halmaz szóval együtt. A geometriában sok esetben a halmaz helyett különböző alakzatokról beszélünk. Például ilyen alakzat a körvonal, (egy ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza) vagy a körlap, (egy ponttól adott távolságnál nem távolabbra lévő pontok halmaza) ezeket ponthalmaznak tekinthetjük. Részhalmaz fogalmat alakítjuk, a részhalmaz szó említése nélkül például akkor amikor a kosárban lévő almák közül kiválogatjuk a pirosakat. Vagy amikor az egyjegyű természetes számok közül kiválogatjuk a párosakat.

A „halmaz” szó helyett az általános iskolában használhatjuk például az „összesség”, „csoport”, az „elem” helyett a „tárgy”, „egyed”, „dolog”, a „beletartozik” helyett az „eleme” szavakat is.

Jelölés. A halmazokat általában a latin nagybetűkkel, az elemeiket a kisbetűkkel jelöljük. Ha a halmaz elemeit felsoroljuk, akkor kapcsos zárójelet használunk. $B = \{2;3;5;7\}$.

Jelölés (Nem alapozó szintű jelölés)**.** Az a elem beletartozik az A halmazba: $a \in A$ (olv. „az a eleme az A halmaznak”).

A b elem nem tartozik bele az A halmazba: $b \notin A$ (olv. „a b nem eleme az A halmaznak”).

A halmaz megadása. Egy halmaz megadása eleminek a megadását jelenti.

A halmazt – egyszerű esetben – megadhatjuk elemeinek felsorolásával.

Például: $B = \{0;2;4;6;8\}$. (Minden elemet csak egyszer írunk le és a sorrend nem számít.)

A halmazt megadhatjuk olyan tulajdonsággal, amely egy alaphalmazból pontosan a kívánt elemeket jelöli ki.

Például: $B =$ {Egyjegyű páros szám} vagy $B =$ {A 10-nél kisebb, kettővel osztható természetes számok}.

Azonban nem minden halmaz adható meg elemeinek felsorolásával és tulajdonság megfogalmazásával.

Például: $C =$ {Páros szám}. Ez a halmaz végtelen számosságú, az összes elem felsorolásával nem adható meg. Ha nem okoz félreértést, akkor elkezdhetjük az elemek felsorolását, és pontozással jelölhetjük azt, hogy végtelen sok elem van.

$C = \{0;2;4;6;\ldots\}$.

Nehezen adható meg tulajdonsággal például az $D =$ {Magyarország Budapest Margit híd} halmaz.

Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor azok egyenlők. A másféle sorrend vagy másféle alak nem teszi mássá a halmazt.

3.1. A számhalmazokra használt állandó jelölések

A halmazok számossága a természetes számok. A 0, 1, 2, 3, … elemű halmaz. Jele: **N**.

$$\mathbf{N} = \{\text{Természetes számok}\} = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

Az egész számok a természetes számok és azok ellentettjei. Jele: **Z**

Definíció. Bármely szám és az ellentettjének az összege nulla. $a + (-a) = 0$, $a \in \mathbf{N}$.

$$\mathbf{Z} = \{\text{Egész számok}\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Racionális számoknak azokat a számokat nevezzük, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként. Jele: $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{Q} = \{\text{Racionális számok}\}.$$

Racionális számok például: $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2} = 1$, $\frac{8}{3}$.

A racionális számok tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos.

A végtelen nem szakaszos tizedestörteket nevezzük irracionális számoknak.

Például az a szám, amelyet úgy képzünk, hogy a tizedesvessző után leírjuk az 1-et, a 10-et stb., vagyis a 10 hatványait növekvő sorrendben: 1,101001000100001…, irracionális.

A valós számok a racionális és irracionális számok halmaza. Jele: $\mathbf{R}$.

$$\mathbf{R} = \{\text{Valós számok}\}$$

Valós számok például: $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2} = 1$, $\frac{8}{3}$, $\sqrt{2}$.

Definíció. Alaphalmaznak nevezzük a tárgyalás során figyelembe vett dolgok összességét. Jele: U.

Definíció. Üres halmaznak nevezzük azt a halmazt, amelynek egy eleme sincs. Jele: $\emptyset$.

Példa. Az alaphalmaz: $U = \{\text{20-nál kisebb természetes számok}\}$; $U = \{n \in N \mid n < 20\}$.

Adjunk meg egy A halmazt az elemei felsorolásával: $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

Ügyelni kell arra is, hogy a gyerekek ne azonosítsák a jelölést a halmazzal. Az $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ akkor is ugyanazt a halmazt jelöli, ha elhagyjuk a kapcsos zárójelet és csak felsoroljuk a számokat mint az A halmaz elemeit. A a 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18 elemek halmaza.

Egy nyitott mondat megoldásai halmazát, azaz a *megoldáshalmazt* – amennyiben az a valós számok egy részhalmaza – megadhatjuk úgy is, hogy a számegyenesen bejelöljük a megfelelő számokat, vagy (ha felsorolhatók) táblázatba írjuk. A fogalom alakítása szempontjából fontos, hogy többféle jelölést, illetve többféle szemléltetést is alkalmazzunk.

Az A halmazt megadhatjuk úgy is, hogy meghatározzuk az elemeinek a közös tulajdonságát. $A = \{$A 3-mal osztható számok$\}$.

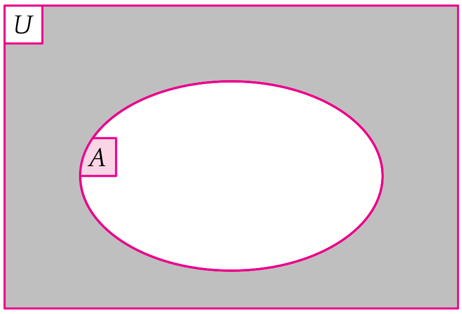
A halmaz szemléltetésére használhatunk Venn-diagramot (halmazábrát) is.

Helyettesítsük be az „n osztható 3-mal" nyitott mondatba az n változó helyére az alaphalmaz elemeit. Ha az A halmaz valamely elemét helyettesítjük be, akkor igaz állítást, ellenkező esetben hamis állítást kapunk. Vagyis az A halmaz ennek a nyitott mondatnak az igazsághalmaza. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az A halmaz minden elemére ennek a nyitott mondatnak a logikai értéke igaz.

Az A halmazt így is felírhatjuk: $A = \{n \in U \mid n$ osztható 3-mal$\}$.

2. Feladat. Írja be az egyjegyű természetes számokat a halmazábra megfelelő részébe!

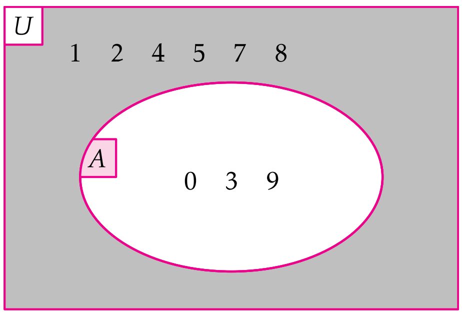
Az alaphalmaz most az egyjegyű számok halmaza, ezt az ábrán a külső téglalap szemlélteti. A feladat szerint ezek közül a számok közül kell kiválasztani a 3 többszöröseit, amelyek bekerülnek a belső síkidomba, az A halmazba. A többi számot (amelyek nem többszörösei a 3-nak) a belső síkidomon kívülre írjuk.



Fontos tudatosítanunk a tanulókban, hogy az egyjegyű számok mindegyikét el kell helyeznünk az ábrán, és mindegyik szám csak egyszer fordulhat elő.

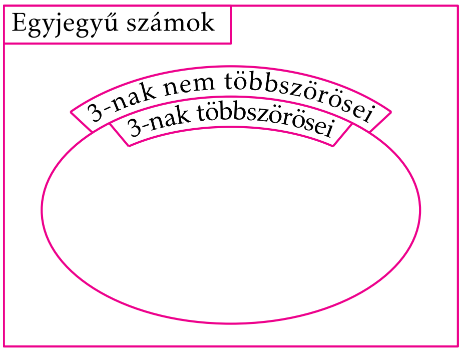
A halmazokat címkékkel láttuk el, igyekezve rövid, de egyértelmű elnevezéseket találni. A címke mindig abba a síkidomba kerül, amelyikre vonatkozik.

Ennek megfelelően a megoldás:



Azaz: $A = \{0, 3, 9\}$. Nem szabad elfeledkeznünk a 0-ról! A 0 is osztható 3-mal, mert a 0 a 3-nak a 0-szorosa.

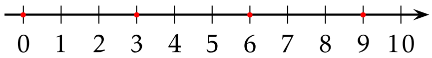
A kiegészítő halmaz fogalmának alakítását segítheti, ha ezt a halmazt is külön címkével látjuk el:



Ugyanezeket a halmazokat megjeleníthetjük táblázatban is:

Egyjegyű számok	
3 többszörösei	3-nak nem többszörösei
0, 3, 6, 9	1, 2, 4, 5, 7, 8

Mivel példánkban számhalmazokról van szó, a halmazokat számegyenesen is tudjuk szemléltetni például úgy, hogy piros ponttal megjelöljük a 3 többszöröseit:



(Ebben az esetben a halmazok elnevezését nem tudjuk feltüntetni.)

A fogalomalakítás szempontjából, a gondolkodás rugalmasságának fejlesztése, a fogalom erősítése és használhatósága végett fontos, hogy használjunk többféle jelölést, szemléltetést.

A fentiekből látszik, hogy a Venn-diagram alkalmas a halmazt értelmező nyitott mondat szemléltetésére is.

Ha azt kérdezzük, hogy mely számok *nem kerültek be az A halmazba*, akkor a válaszban ennek a halmaznak is fel tudjuk sorolni az elemeit, vagy meg tudjuk határozni, hogy milyen tulajdonságúak ezek az elemek. Ezzel el is érkeztünk az első művelethez.

3.2. Logikai művelet

Definíció. Logika műveletnek nevezzük (a formális logikában) azt a gondolati eljárást (valamely nyelvi forma alkalmazását), amely eredményeként egy vagy több ítéletből újabb ítéletet kapunk úgy, hogy annak logikai értéke csak a felhasznált ítéletek logikai értékétől függ.

A logikai műveletet annyi változósnak mondjuk, ahány ítéletből hozzuk létre az új ítéletet. A fenti művelet az állítás *tagadása*, csak az állítástól függ, így a fenti művelet egyváltozós.

Definíció. Elemi ítéletnek nevezzük azt az ítéletet, amelyet nem lehet egyszerűbb ítéletből logikai műveletek alkalmazásával létrehozni.

Az összetett ítéletek az elemi ítéletekből logikai műveletekkel képezhetők.

3.3. Halmazműveletek

Mikor tekintünk két halmazt egyenlőnek?

Definíció. A B halmaz egyenlő az A halmazzal, ha a B halmaz minden eleme eleme az A halmaznak, és az A halmaz minden eleme eleme B-nek, vagyis a két halmaz elemei ugyanazok.

Jelölése: $A = B$. Azt, hogy A és B nem egyenlő, így jelöljük: $A \neq B$.

A halmazok egyenlőségének definíciójából következik, hogy az elemeket tetszőleges sorrendben sorolhatjuk föl, tehát ha a fenti A halmaz elemeit más sorrendben soroljuk fel, akkor ugyanazt a halmazt kapjuk. Ha egy elemet többször felsorolunk, akkor az csak egy elemnek számít.

3.4. Részhalmaz, üres halmaz fogalma

Mikor tekintjük egyik halmazt egy másik részhalmazának?

Definíció. A B halmaz részhalmaza a C halmaznak, ha a B halmaz minden eleme eleme a C halmaznak.

Jelölése: $B \subseteq C$ vagy $C \supseteq B$.

Az alaphalmazon bármely halmaz részhalmaza az alaphalmaznak. $A \subseteq U$. Minden halmaz részhalmaza saját magának. $A \subseteq A$ Az üres halmaz az a halmaz, amelynek egyetlen eleme sincs.

Az összes lehetséges halmaz között egyetlen egy üres halmaz van. Ha legalább kettő lenne, azoknak az elemei megegyeznének, (egyiknek sincs egyetlen eleme sem) ezért – a fentiek szerint – egyenlők.

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza. $\emptyset \subseteq C$.

Az „üres halmaz” fogalmat legtöbbször a nyitott mondatok igazsághalmazával kapcsolatosan használjuk, amikor az alaphalmaznak nincs olyan eleme, amely igazzá tenné a nyitott mondatot. Az alsó tagozatban nem javasoljuk használni a jelölését, mert könnyen összekeverhető azzal az esettel, amikor az $x = 0$ a megoldás.

Definíció. A B halmaz valódi részhalmaza a C halmaznak, ha a B halmaz minden eleme beletartozik a C halmazba, de a C halmaznak van olyan eleme, amely nem tartozik bele a B halmazba. Más szóval $B \subseteq C$, de $B \neq C$.

Jelölése: $B \subset C$ vagy $C \supset B$.

3. Feladat. Sorolja föl az A halmaz összes részhalmazát! $A = \{1, 2, 3\}$

Megoldás. $\{0\}$, mert az üres halmaz minden halmaznak a részhalmaza,

az egy elemű halmazok a $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$;

a két elemű halmazok $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

és az $\{1, 2, 3\}$, mert minden halmaz részhalmaza saját magának.

4. Feladat. Az alaphalmaz: $U = \{n \in N \mid n < 20\}$. (Olvasd például: az alaphalmaz a 20-nál kisebb természetes számok halmaza.)

$H = \{n \in U \mid n$ osztható 6-tal$\}$. (Olvasd például: az alaphalmaz elemei közül azok, amelyek oszthatók 6-tal, vagy azok a hattal osztható számok, amelyek elemei az alaphalmaznak.)

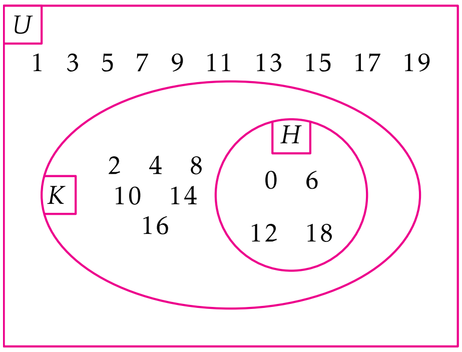
$K = \{n \in U \mid n$ osztható 2-vel$\}$. (Olvasd például: az alaphalmaz elemei közül a kettővel oszthatók, vagy azok a kettővel osztható szánok, amelyek elemei az alaphalmaznak.)

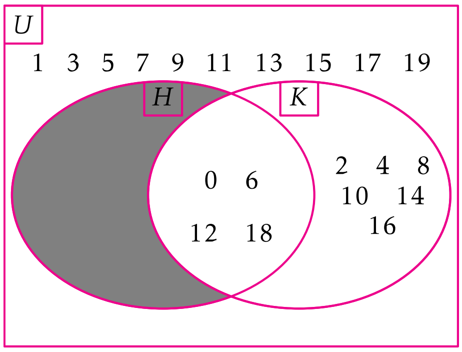
a) Ábrázoljuk közös halmazábrán a K, a H és az U halmazokat.

b) Milyen kapcsolat van a K, a H és az U halmazok között?

c) A K és a H halmazok közül melyik részhalmaza a másiknak?

Megoldás. *a)* Kétféleképpen is ábrázolhatjuk a K, a H és az U halmazt. A második esetben a H halmaz beszínezett része üres.





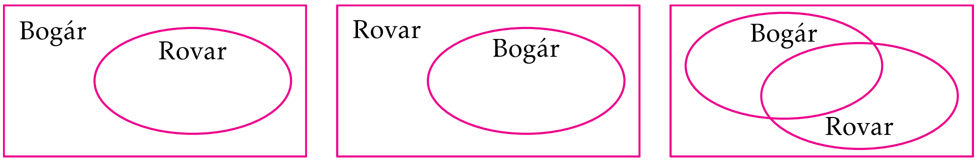
b) A K és a H is valódi részhalmaza U-nak.

A K-nak valódi részhalmaza H, úgy is mondhatjuk, hogy a hattal osztható számok valódi részhalmaza a kettővel osztható számoknak.

A K-nak részhalmaza a K, és a H-nak részhalmaza a H, mert minden halmaz részhalmaza saját magának.

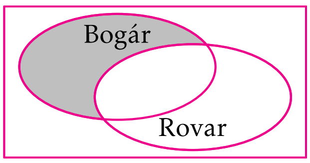
5. Feladat.

a) Melyik ábra fejezi ki a következő állítást? Minden bogár rovar.



b) Milyen halmazelméleti kapcsolat van a bogarak, illetve a rovarok halmaza között?

Megoldás. *a)* A második és a harmadik ábra helyes. A harmadik ábrában a színes rész üres.



b) A rovarok halmazának valódi részhalmaza a bogarak halmaza, mert van olyan rovar, amelyik nem bogár.

4. A tagadás művelete (Köves Gabriella)

4.1. Állítások tagadása

A köznyelvben egy állítást a „Nem igaz, hogy ... ”, „Az nem létezik, hogy ... ” „Kizárt, hogy ..., „Tagadom, hogy ... ” mondatkezdéssel szoktunk tagadni. A tagadásra vannak emellett más lehetőségek is, például a „nem” tagadószót iktatjuk be az állítmány elé, vagy megfelelő körülírást alkalmazunk.

Példa.

Állítás:	Állítás tagadása:
A fal fehér	Nem igaz, hogy a fal fehér. A fal nem fehér.
A természetes számok halmazán	
A 2 páratlan szám.	Nem igaz, hogy a 2 páratlan szám. A 2 nem páratlan szám. A 2 páros szám. Nem igaz, hogy a 2 nem páros szám.

A második esetben azért mondhatjuk, hogy a 2 páratlan szám tagadása 2 páros szám, mert egy természetes szám vagy páros, vagy páratlan. Nincs más eset.

6. Feladat. Figyeljük meg a következő ítéletek logikai értékét!

A: A 12 osztható 3-mal.	(i)	A: Nem igaz, hogy a 12 osztható 3-mal.	(h)
N: Az 5 nagyobb 5-nél.	(h)	N: Az 5 nem nagyobb 5-nél.	(i)
F: A csoportban van fiú.	(...)	F: A csoportban nincs fiú.	(...)
H: A 7 nem prímszám.	(...)	H: Nem igaz, hogy a 7 nem prímszám.	(...)

Az előző példákban az első oszlopban lévő ítéletekből újabb ítéleteket hoztunk létre oly módon, hogy a „nem”, „nem igaz”, „nincs” nyelvi formákat alkalmaztuk. Az új ítéletek logikai értéke az eredeti ítélet logikai értékének az ellenkezője lesz.

Definíció. Negációnak (tagadásnak) nevezzük azt a logikai műveletet, amely során valamely ítéletet úgy módosítunk, hogy logikai értéke az ellenkezőjére változik.

Jelölés: Valamely P ítélet tagadása $\neg P$.

Egy ítélet tagadása esetén nem a nyelvi forma a mérvadó.

Például az előző példában a H tagadását a következő formában is megfogalmazhattuk volna: H: A 7 prímszám.

A negáció úgynevezett Carol diagrammal ábrázolva:

P	$\neg P$
i	h
h	i

Igaz állítás tagadása hamis, hamis állítás tagadása igaz állítás.

Példa. „A 18 kétjegyű szám.” igaz állítás, amelynek a tagadása „A 18 nem kétjegyű szám.” (hamis állítás).

„A 18 egyjegyű szám.”, „A 18 háromjegyű szám.” stb. állítások logikai értéke szintén hamis, de nem tagadásai az eredeti mondatnak. Ezt az oktatásban tudatosítani kell a fogalom megértéséhez. A 18 egyjegyű szám azért nem tagadása az eredeti mondatnak, mert ebben az esetben a kettőnél többjegyű számokról nem mondtunk semmit.

7. Feladat. Állapítsuk meg rendre a következő ítéletek logikai értékét!

P_1: A 3 nagyobb az 5 nél. (h)

P_2: A 3 nem nagyobb az 5 nél. (...)

P_3: Nem teljesül, hogy a 3 nem nagyobb az 5 nél. (...)

P_4: Nem igaz, hogy nem teljesül, hogy a 3 nem nagyobb az 5 nél. (...)

Megoldás. P_1: (h); P_2: (i); P_3: (h); P_4: (i)

A példa felhívja a figyelmünket a többszörös negációra. Vagyis a negáció műveletét bármely ítéletre alkalmazhatjuk, azaz tagadhatjuk azokat az ítéleteket is, amelyeket előzőleg tagadással hoztunk létre. Mivel az első negáció megváltoztatja, a második visszaváltoztatja stb. az ítélet logikai értékét, ezért a páros számú negációk elhagyhatók, a páratlan számú negációk egy negációval helyettesíthetők.

Legyen P egy igaz állítás, akkor P többszörös tagadása:

$P = \text{i}$; $\neg P = \text{h}$; $\neg(\neg P) = \text{i}$; $\neg(\neg(\neg P)) = \text{h}$.

Ha Q egy hamis állítás, akkor Q többszörös tagadása:

$Q = \text{h}$; $\neg Q = \text{i}$; $\neg(\neg Q) = \text{h}$; $\neg(\neg(\neg Q)) = \text{i}$.

Példa. Az első oszlopban lévő (halandzsa nyelven íródott) ítéletek logikai értékét fogadjuk el.

Meghatározható-e ezekből a második oszlopban lévő ítéleteknek a logikai értéke?

P: Ekete, pekete, cukota pézik.	(i)	$\neg P$: Ekete, pekete, cukota nem pézik. Nem igaz, hogy ekete, pekete, cukota pézik.	(...)
S: Efer, gefer nincs guminélin.	(h)	$\neg S$: Efer, gefer van guminélin. Nem igaz, hogy efer, gefer nincs guminélin.	(...)
R: $5 \cdot 6 \leq 9$	(i)	$\neg R$: $5 \cdot 6 > 9$ Nem igaz, hogy $5 \cdot 6 \leq 9$.	(...)

Észrevehetjük, hogy a konkrét ítéletektől elvonatkoztatva csupán a logikai értékek ismeretében is elvégezhetjük a tagadást. Az új logikai értéket az eredeti logikai értékből, az ítélet tartalmától teljesen függetlenül állapítottuk meg. (h; i; h)

A tagadás logikai értékét a kijelentések ismerete nélkül is meg tudjuk mondani:

$\neg$i = h; $\neg$h = i.

4.2. Komplementer (kiegészítő) halmaz

Vizsgáljuk meg a tagadást a halmazok esetében is!

8. Feladat (Óvodában, iskolában 1. osztályban, felzárkóztatás alkalmával adható feladat). Válogassuk ki a logikai készlet piros elemei közül a

a) kicsi elemeket,

b) lyukas elemeket,

c) zöld elemeket.

Melyeket nem válogattuk ki?

Az általunk használt logikai készlet 48 elemből áll. Az elemeknek négy tulajdonsága változik:

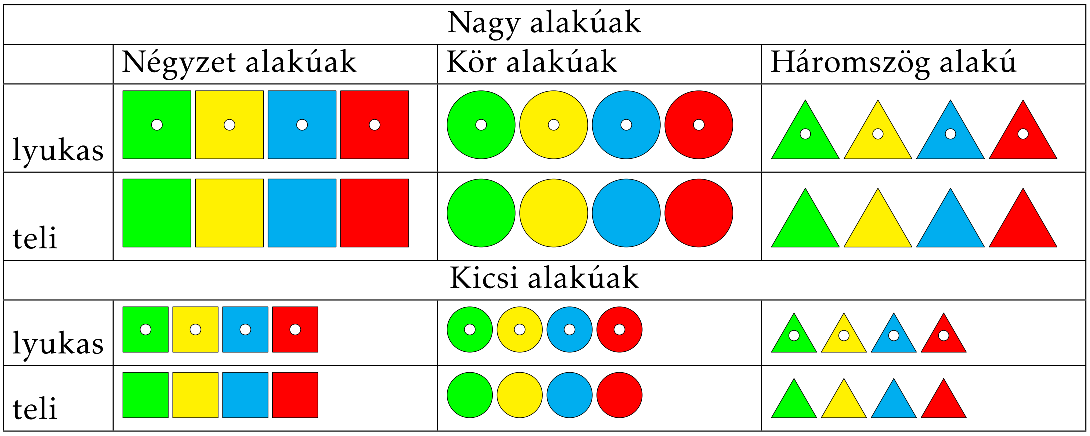
Méret szerint lehet kicsi vagy nagy.

Szín szerint lehet sárga, piros, kék vagy zöld.

Lyukasság szerint lehet lyukas vagy teli (nem lyukas).

Forma szerint lehet kör, háromszög vagy négyzet.

Az alaphalmaz ez a logikai készlet.



Megoldás. *a)* Az alaphalmaz ennek a logikai készletnek a piros elemei. Az $A = \{\text{piros elemek}\}$, a többi a maradék elem, amelyeket nem válogattunk ki, a nagy piros elemek.

b) A teli piros elemeket nem válogattuk ki.

c) Mindegyik piros elem, mert semelyiket sem válogattuk ki a piros elemek közül.

Példa. Az asztalon csak piros és kék korongok vannak. Tegyük a piros korongokat az egyik, a többit a másik dobozba. Mely korongok kerültek a másik dobozba?

Válaszolhatjuk azt, hogy a nem pirosak, de azt is, hogy a kék korongok kerültek a másik dobozba, (de csak ebben az esetben, ha az alaphalmazban nincs más színű elem). A válasszal meghatároztuk a piros korongok halmazának komplementerét. Láthatjuk azt is, hogy a tagadás a nyelvi formát tekintve többféle lehet: a tagadó mondatban szerepelhet a *nem* tagadószó, de nélküle, egy másik tulajdonság megadásával is azonosíthatjuk, megfogalmazhatjuk („címkézhetjük”) a komplementer halmazt.

5. Kvantoros állítások (Köves Gabriella)

A logikában kvantoroknak nevezzük a „minden” és a „van olyan” kifejezéseket.

A „Minden, . . . ”, „Van olyan . . . ” típusú állítások logikai értékét is az alaphalmaz elemeire vonatkoztatva határozhatjuk meg.

A „minden”-t szokás univerzális kvantornak, a „létezik” vagy „van olyan” kifejezéseket egzisztenciális kvantornak nevezni, a kvantorokat tartalmazó állításokat pedig kvantoros állításoknak. Alsó tagozaton a kvantor szót nem használjuk, de kvantoros állításokkal dolgozunk.

A „Minden”, „Mindegyik” kezdetű állítást akkor fogadjuk el igaznak, ha az alaphalmaz összes elemére igaz az állítás.

A „Van olyan ... ”, „Van köztük ... ” kezdetű állítások logikai értéke akkor igaz, ha az alaphalmaznak van legalább egy olyan eleme, amelyre igaz az állítás.

A „minden A-ra igaz B” Jelölése: $\forall A\colon B$

A „van olyan A, amelyre igaz B” Jelölése: $\exists A\colon B$

A „pontosan egy olyan A van, amelyre igaz B” Jelölése: $\exists! A\colon B$

5.1. Kvantoros állítások tagadása

A „minden” és a „van olyan” kifejezések szoros logikai kapcsolatára mutatnak rá a következő példák.

Példa. Katinak *van olyan* könyve, amelyik be van kötve. Petire ez az állítás nem igaz. Mit mondhatunk Peti könyveiről?

„Petinek *nincs olyan* könyve, amelyik be van kötve.” vagy „Petinek *minden* könyvére igaz, hogy *nincs* bekötve.” (Petinek *egyik* könyve *sincs* bekötve.)

Példa. Van egy ládánk, teli piros almával.

Erről egy igaz állítás: A ládában minden alma piros.

Azaz ha A jelöli az almát, B azt a tulajdonságot, hogy piros, akkor: „Minden A-ra igaz B”. Jelölése: $\forall A\colon B$.

Tagadjuk ezt az állítást! Tegyünk a ládába egy sárga almát. Ekkor a ládában van olyan alma, amelyik *nem* piros.

A „minden A-ra igaz B” tagadása: „Van olyan A, amelyre nem igaz B”.

Jelölése: $\neg(\forall A\colon B) = \exists A\colon \neg B$.

A ládánkban most piros és sárga alma is van.

Erről egy igaz állítás: A ládában van piros alma.

Tagadjuk ezt az állítást! Vegyük ki a ládából a piros almákat. Ekkor a ládában minden almára igaz, hogy *nem* piros. Másképp megfogalmazva, egyik almára sem igaz, hogy piros.

Azaz: A „ Van olyan A, amelyre B” tagadása: „minden A-ra nem igaz B”, vagy „egyik A-ra sem igaz B” Jelölése: $\neg(\exists A\colon B) = \forall A\colon \neg B$.

Kvantoros állítások tagadása	
Állítás	Tagadása
Minden ...	Nem minden ... Van olyan ..., amelyik nem
Van olyan ...	Nincs olyan ... Minden ... nem/nincs (egyik ... sem/sincs)

9. Feladat (Második osztályban is adható feladat)**.** Döntsd el, igazak-e vagy hamisak az alábbi állítások a 11, 12, 13, 14, 15 számokra!

a) Mindegyik szám kétjegyű.

b) Mindegyik szám páros.

c) Van köztük olyan szám, amelyik 10-nél kisebb.

d) Van köztük olyan szám, amelyben a számjegyek összege páratlan.

Megjegyzés. A „Minden" és a „Van olyan" kifejezések helyes használatának kialakításához az állítások megállapított logikai értékét mindegyik esetben indokoljuk.

Például az *a)* állítás azért igaz, mert „A ... szám kétjegyű." nyitott mondatba behelyettesítve a felsorolt számok mindegyikét, igaz állításokat kapunk.

b) Hamis állítás, mert van a számok között páratlan. Ilyen pl. a 11.

A *c)* állítás azért hamis, mert nincs egyetlen olyan szám sem a felsoroltak között, amely igazzá tenné „A ... szám 10-nél kisebb." nyitott mondatot.

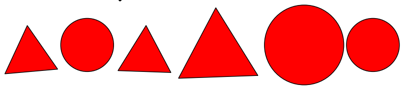
d) Elég egy példát mutatnunk, amelyben a számjegyek összege páratlan. Pl. a 12.

5.2. Az állítások átfogalmazása

Az állítások átfogalmazása azt jelenti, hogy olyan, az eredetivel azonos logikai értékű állítást alkotunk, amelynek a tartalma is változatlan.

A logikai kötőszavak helyes alkalmazásával a matematika, illetve bármely szaknyelv, és a köznyelv használatát, valamint ezek kapcsolatát is erősíthetjük.

Példa. Fogalmazzunk meg állításokat az elemekről, majd döntsük el, hogy igazak-e vagy hamisak!

1. osztályban	2. osztályban
	10 11 2 4 6 8
a) Mindegyik alakzat piros. (I)	Mindegyik szám páros. (H)
b) Csak piros alakzatokat választottunk. (I)	Csak páros számok vannak a táblán. (H)
c) Van az alakzatok között piros. (I)	Van közöttük páros szám. (I)
d) Van olyan alakzat, amelyik nem kör alakú. (I)	Van olyan, amelyik nem a 4 többszöröse. (I)
e) Nem mindegyik alakzat kör. (I)	Nem mindegyik szám a 4 többszöröse. (I)
f) Van olyan alakzat, amelyik nem piros. (H)	Van olyan szám, amelyik nem páros. (I)
g) Nem csak piros alakzatokat választottunk. (H)	Nem csak páros számok vannak a táblán. (I)
h) Nincs az alakzatok között piros. (H)	Nincs közöttük páros szám. (H)
i) Egyik sem piros. (H)	Egyik sem páros. (H)

Megjegyzések. A táblázat két oszlopában szereplő állítások logikai szerkezete páronként azonos, tartalmuk azonban eltérő. Az *a)–b)*; a *d)–e)*; az *f)–g)* és a *h)–i)* állítások egymás átfogalmazásai, ugyanazt jelentik.

5.3. Konjunkció – metszet

10. Feladat. Két ítéletből hozzunk létre új ítéletet! Figyeljük meg a logikai értékeket!

A: A 11 prímszám. (i)	B: A 11 nagyobb 10-nél. (i)
$A \wedge B$: A 11 prímszám és (a 11) nagyobb 10-nél. (. . .)	
C: A 2 prímszám. (i)	D: A 2 páros szám. (i)
$C \wedge D$: A 2 prímszám, pedig (a 2) páros szám.(. . .)	
E: Minden rombusz trapéz. (. . .)	F: Semelyik rombusz sem deltoid. (. . .)
$E \wedge F$: Minden rombusz trapéz, de semelyik rombusz sem deltoid. (. . .)	
G: Nagy Márta egyetemi hallgató. (h)	H: Nagy Márta barátja nem hallgató. (i)
$G \wedge H$: Nagy Márta hallgató, noha a barátja nem az. (. . .)	
I: Petőfi írta a Toldit. (?)	J: Arany írta a János vitézt. (?)
$I \wedge J$: Petőfi írta a Toldit és Arany a János vitézt. (?)	
K: Ekete, pekete, cukota pézik. (h)	L: Efer, gefer guminélin. (?)
$K \wedge L$: Ekete, pekete, cukota pézik, és Efer, gefer guminélin. (?)	

Megoldás. $A \wedge B$: i; $C \wedge D$: i; E: i, F: h, $E \wedge F$: h; $G \wedge H$: h; I: h, J: h, $I \wedge J$ h; $K \wedge L$: h; Az L állítás akár igaz, akár hamis, az összetett $K \wedge L$ állítás hamis.

Definíció. Konjunkciónak (logikai „és” műveletnek) nevezzük azt a logika műveletet, amely során két ítéletből olyan ítéletet alkotunk, amely pontosan akkor igaz, ha a két eredeti ítélet egyidejűleg igaz. Jelölése: $P \wedge R$.

A konjunkciót úgy hozzuk létre, hogy a két ítéletet az „és”, „bár”, „noha”, „de”, „pedig”, „mégis”, „továbbá” stb. kötőszóval kapcsoljuk össze. Ezek a kötőszók (a logikai művelet szempontjából) helyettesíthetők az „és” kötőszóval.

A konjunkció esetén is megfigyelhetjük, hogy a konkrét ítéletektől elvonatkoztatva csupán a logikai értékek ismeretében is elvégezhetjük a konjunkciót. Az új összetett állítás logikai értéket az eredeti logikai értékekből, az ítélet tartalmától függetlenül megállapíthatjuk. Azaz a logikai értékekkel is elvégezhetjük a konjunkciót:

A konjunkció („logikai és”) Carol táblázata:

P	R	$P \wedge R$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

$\mathrm{i} \wedge \mathrm{i} = \mathrm{i}$; $\mathrm{i} \wedge \mathrm{h} = \mathrm{h}$; $\mathrm{h} \wedge \mathrm{i} = \mathrm{h}$; $\mathrm{h} \wedge \mathrm{h} = \mathrm{h}$

11. Feladat. Két ítéletből hozzunk létre új ítéletet! Figyeljük meg a logikai értékeket!

A: A 11 prímszám. (i)	B: A 11 nagyobb 10-nél. (i)
$A \vee B$: A 11 prímszám vagy (a 11) nagyobb 10-nél. (?)	
C: A 2 prímszám. (i)	D: A 2 páros szám. (i)
$C \vee D$: A 2 prímszám vagy (a 2) páros szám. (...)	
E: Minden rombusz trapéz. (...)	F: Semelyik rombusz sem deltoid.(...)
$E \vee F$: Minden rombusz trapéz vagy semelyik rombusz sem deltoid. (...)	
G: Nagy Márta egyetemi hallgató. (h)	H: Nagy Márta barátja nem hallgató. (i)
$G \vee H$: Nagy Márta hallgató vagy a barátja nem az. (...)	
I: Petőfi írta a Toldit. (?)	J: Arany írta a János vitézt. (?)
I∨J: Petőfi írta a Toldit vagy Arany a János vitézt. (?)	
K: Ekete, pekete, cukota pézik. (h)	L: Efer, gefer guminélin. (?)
$K \vee L$: Ekete, pekete, cukota pézik vagy Efer, gefer guminélin. (?)	

Megoldás. $A \vee B$: i; $C \vee D$: i; E: i, F: h, $E \vee F$: i; $G \vee H$: i; I: h, J: h, $I \vee J$ h; Ha az L állítás igaz, akkor $K \vee L$: i, ha az L állítás hamis, akkor az összetett állítás is hamis $K \vee L$: h.

Definíció. Diszjunkciónak (logikai „vagy” műveletnek) nevezzük azt a logikai műveletet, amely során két ítéletből olyan ítéletet alkotunk, amely pontosan akkor hamis, ha a két eredeti ítélet egyidejűleg hamis. Jelölés: $P \vee R$.

A fenti példákban a „vagy” kötőszót megengedő értelemben használtuk, vagyis minden olyan esetben igaz volt a két ítéletből a „vagy” kötőszóval összekapcsolt állítás, amikor legalább az egyik ítélet igaz volt.

A diszjunkciót is kiértékelhetjük az ítéletek tartalmától függetlenül, csupán az eredeti logikai értékek ismeretében:

i ∨ i = i; i ∨ h = i; h ∨ i = i; h ∨ h = h.

A diszjunkció („logikai vagy”) Carol táblázata:

P	R	$P \vee R$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Megnehezítheti a diszjunkció felismerését az, hogy a „vagy” kötőszót még két logikai művelet esetén is használjuk (lásd később), valamint az is, hogy a megengedő vagy” kötőszót a mindennapi beszédben helyettesíthetjük az „illetve” a „meg”, az „és” stb. kötőszavakkal is.

5.4. A Sheffer- és a Zsegalkin-művelet

A következő két példában a vagy kötőszó nem diszjunkciót jelent.

Példa. „Ma este (vagy) táncolni megyek, vagy otthon olvasok (de a kettőt egyszerre nem).”

Ezzel az összetett ítélettel azt akarjuk kifejezni, hogy egyidőben nem lehet igaz a következő két állítás:

P: „Ma este táncolni megyek”, illetve Q: „Ma otthon olvasok”.

Lehet, hogy táncolni fogok, az is lehet, hogy otthon olvasok, sőt még az is lehet, hogy egészen mást fogok csinálni, de biztos, hogy nem fogok egyidőben táncolni, illetve otthon olvasni.

Ezt az „összeférhetetlenségi vagy” logikai műveletet Sheffer-műveletnek nevezzük.

Definíció. A Sheffer-művelettel összekapcsolt összetett ítélet akkor és csak akkor hamis, ha mindkét komponense (P és Q is) igaz. Jelölése: $P \mid Q$.

Carol diagrammal szemléltetve:

P	Q	$P \mid Q$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	i

Példa. Lujza vagy tudja a tételt, vagy megbukik.

Ez az összetett ítélet azt fejezi ki, hogy a következő két állítás közül pontosan az egyik igaz:

L: „Lujza tudja a tételt”, illetve M: „Lujza megbukik”.

Ez az állítás nemcsak azt fejezi ki, hogy az L és a M ítélet logikai értéke egyidejűleg nem lehet igaz, hanem azt is, hogy egyidejűleg nem lehet hamis.

Ugyanis ha Lujza tudja a tételt nem fog megbukni, ha nem tudja a tételt, akkor meg fog bukni.

Ezt a „kizáró vagy” logikai műveletet Zsegalkin-műveletnek nevezzük.

Definíció. A Zsegalkin-művelettel összetett ítélet akkor igaz, ha csak az egyik vagy csak a másik összetevője igaz.

Jelölés: $L \triangle M$.

Carol diagrammal szemléltetve:

L	M	$L \triangle M$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Definíció. Logikai műveletnek nevezzük (a matematikai logikában) ha a logikai értékek valamely rendezett rendszeréhez pontosan egy logikai értéket rendelünk hozzá.

Negáció	**Konjunkció**	**Diszjunkció**	**Zsegalkin művelet**	**Kizáró vagy**
i $\mapsto$ h	(i;i) $\mapsto$ i	(i;i) $\mapsto$ i	(i;i) $\mapsto$ h	(i;i) $\mapsto$ h
h $\mapsto$ i	(i;h) $\mapsto$ h	(i;h) $\mapsto$ i	(i;h) $\mapsto$ i	(i;h) $\mapsto$ i
	(h;i) $\mapsto$ h	(h;i) $\mapsto$ i	(h;i) $\mapsto$ i	(h;i) $\mapsto$ i
	(h;h) $\mapsto$ h	(h;h) $\mapsto$ h	(h;h) $\mapsto$ i	(h;h) $\mapsto$ h

A logikai műveleteket nyitott mondatokkal is felírhatjuk (a műveleteket Venn-diagramokkal is szemléletessé tehetjük).

Definíció. Az A és B halmaz szimmetrikus különbsége azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek a két halmaz közül (A vagy B halmazok közül) pontosan az egyiknek az elemei. Jelölése: $A \triangle B$.

$$A \triangle B = \{x \in U \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

Olvasd: az A és B halmaz szimmetrikus különbsége mindazon alaphalmazbeli x elemek, amelyek elemei az A halmaznak, de nem elemei a B-nek, vagy nem elemei az A-nak, de elemei a B-nek; röviden, amelyek A és B közül csakis az egyiknek az elemei.

12. Feladat. Az alaphalmaz: U = {A 20-nál nem nagyobb természetes számok}. Tekintsük a következő nyitott mondatokat!

a: $n < 10$; b: Az n osztható 4-gyel; c: Az n összetett szám.

Vigyázat! A 0-t nem tekintjük összetett számnak! (Sem prímszámnak.)

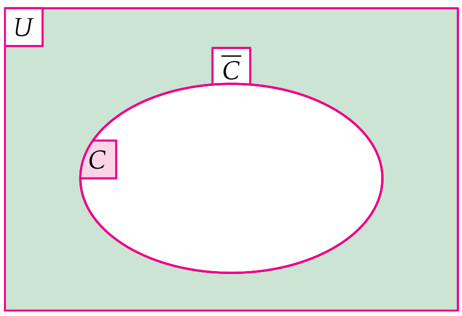
(Definíció szerint minden 1-nél nagyobb egész szám vagy prím, vagy összetett szám. Egy pozitív primszámnak pontosan két pozitív osztója van. Az összetett számnak van valódi osztója, azaz 1-en és önmagán kívül is van osztója. A 0 és az 1 sem nem prim szám, sem nem összetett szám.)

Jelölje az a nyitott mondat megoldáshalmazát A, ahol $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; a b megoldáshalmazáat B, ahol $B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$; a c megoldáshalmazát C, ahol $C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$.

a) $\neg c$: ....

A $\neg c$ igazsághalmaza: ....

Töltse ki a halmazábrát!



A $\neg c$ igazsághalmazát a C megoldáshalmaz komplementerének vagy kiegészítő halmazának nevezzük.

Definíció. Egy C halmaz kiegészítő halmaza (komplementere) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek elemei az alaphalmaznak, de nem elemei a C halmaznak.

Jelölése: $\overline{C}$.

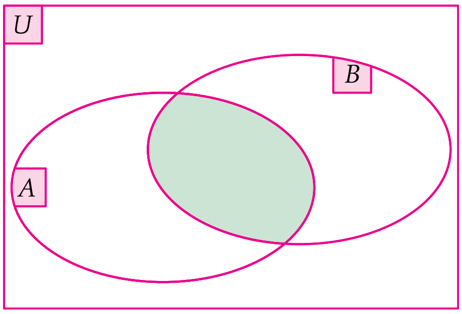
$$\overline{C} = \{x \in U \mid x \notin C\}$$

b) Mely számokra igaz az a és b nyitott mondatok konjunkciója?

$a \wedge b$: ....

Az $a \wedge b$ igazsághalmaza: ....

Töltse ki a halmazábrát!



Az $a \wedge b$ igazsághalmaza az A és B halmazok metszete.

Definíció. Két halmaz közös része (metszete) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek mindkét halmazba beletartoznak.

Jelölése: $A \cap B$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A, x \in B\}$$

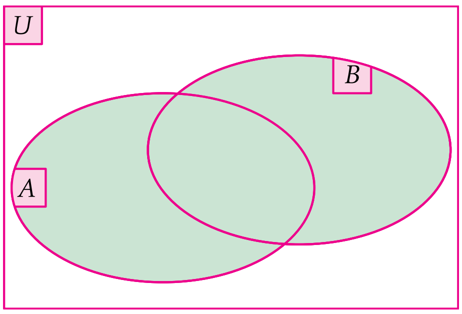
Olvasd: az A metszet B halmaz elemei mindazon alaphalmazbeli x elemek, amelyek elemei az A halmaznak és a B halmaznak is.

c) Mely számokra igaz az a és b nyitott mondatok diszjunkciója?

$a \vee b$: ....

Az $a \vee b$ igazsághalmaza: ....

Töltse ki a halmazábrát!



Az $a \vee b$ igazsághalmaza az A és B halmazok egyesítése (idegen szóval uniója).

Definíció. Két halmaz egyesítése (uniója) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikbe beletartoznak.

Jelölése: $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A, x \in B\}$$

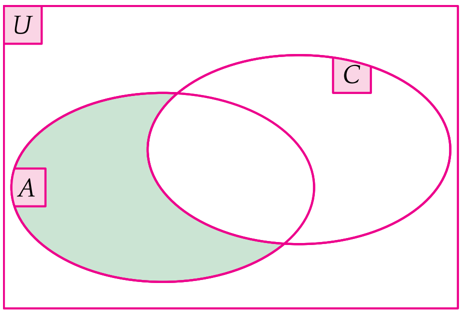
Olvasd: az A unió B halmaz elemei mindazon alaphalmazbeli x elemek, amelyek elemei az A halmaznak vagy a B halmaznak vagy mindkét halmaznak.

d) Mely számokra igaz az a és c negációjának konjunkciója („logikai és”)? Azaz mely számokra teljesül egyszerre az a és a c tagadása?

$a \wedge (\neg c)$: $n < 10$ és az n nem összetett szám.

Az $a \wedge (\neg c)$ igazsághalmaza: ....

Szemléltesse halmazábrán az igazsághalmazt!



Ezt a halmazt az A és C ilyen sorrendben vett különbséghalmazának nevezzük.

Definíció. Az A és B halmaz (ilyen sorrendben vett) különbsége azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek beletartoznak az A halmazba, de nem tartoznak bele a B halmazba.

Jelölése: $A \setminus B$

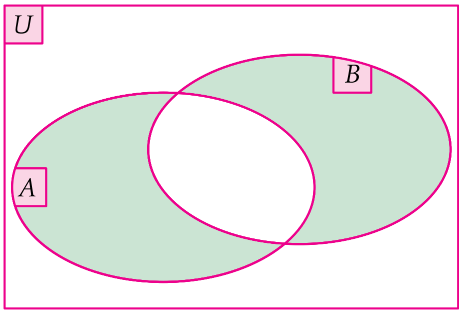
$$A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A, x \notin B\}$$

Olvasd: az A és B halmaz (ilyen sorrendben vett) különbsége mindazon alaphalmazbeli x elemek, amelyek elemei az A halmaznak, de nem elemei a B halmaznak.

e) Mely számokra igaz az a és b nyitott mondatok közül csakis az egyik?

Az igazsághalmaz: ....

Szemléltesse halmazábrán az igazsághalmazt!



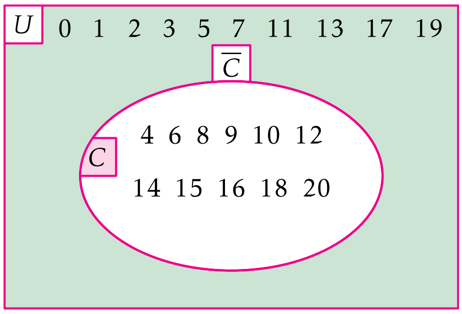
Definíció. Az A és B halmaz szimmetrikus különbsége azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek a két halmaz közül (A vagy B halmazok közül) pontosan az egyiknek az elemei. Jelölése: $A \triangle B$.

$$A \triangle B = \{x \in U \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

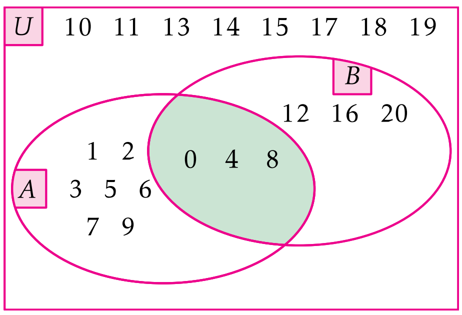
Olvasd: az A és B halmaz szimmetrikus különbsége mindazon alaphalmazbeli x elemek, amelyek elemei az A halmaznak, de nem elemei a B-nek, vagy nem elemei az A-nak, de elemei a B-nek; röviden, amelyek A és B közül csakis az egyiknek az elemei.

Megjegyzés. Ez a példa felhívja a figyelmünket a logikai műveletek és a halmazműveletek közti kapcsolatra.

a) $\neg c$: Az n nem összetett szám. A $\neg c$ igazsághalmaza: $\{1,2,3,5,7,11,13,17,19\} = \overline{C}$.

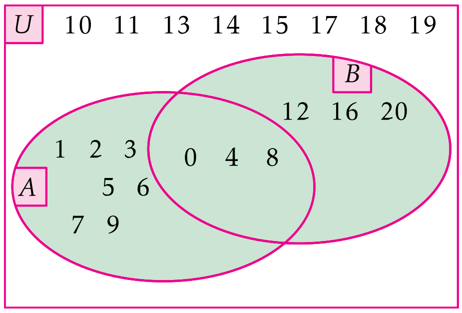


b) $a \wedge b$: $n < 10$ és az n osztható 4-gyel. Az $a \wedge b$ igazsághalmaza: $\{0, 4, 8\} = A \cap B$.

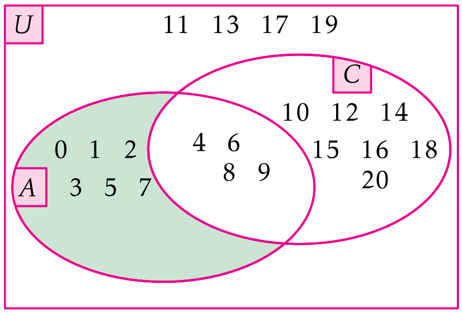


c) $a \vee b$: $n < 10$ vagy az n osztható 4-gyel.

Az $a \vee b$ igazsághalmaza: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,16,20\} = A \cup B$.

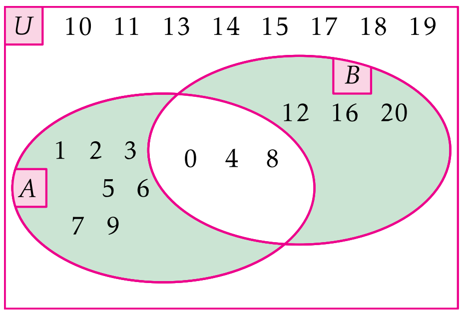


d) Az $a \wedge (\neg c)$ (a, de nem c) igazsághalmaza: $\{0,1,2,3,5,7,\} = A \cup \overline{C} = A \setminus C$



Ez a halmazok körében a halmazkivonás. Nincs logikai műveleti megfelelője.

e) Az $a \circ b$ igazsághalmaza: $\{1,2,3,5,6,7,9,12,16,20\} = A \triangle B$

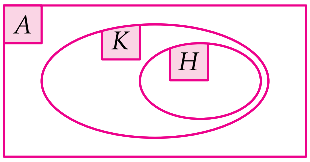


(A „kizáró vagy” logikai művelet megfelelője a halmazok *szimmetrikus differenciája*. Az ábráról látszik, honnan kapta a nevét.)

13. Feladat. Legyen az A alaphalmazban a H halmaz részhalmaza a K halmaznak: $H \subseteq K$. Ábrázolja a halmazábrán a H és a K halmazt.

Határozza meg a következő műveletek eredményét: $H \cap K$; $H \cup K$; $H \setminus K$; $K \cap \emptyset$; $H \cap \emptyset$; $K \cup \emptyset$; $K \cup A$; $A \setminus H$; $A \setminus K$

Megoldás.

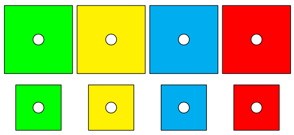
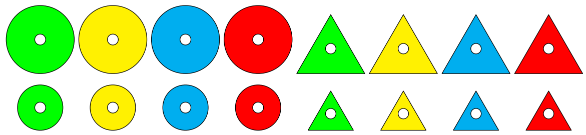
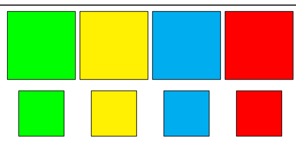
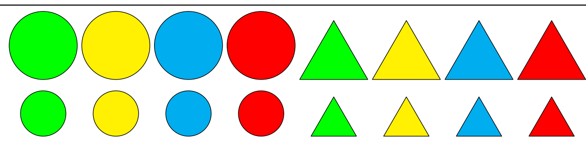


$H \cap K = H$; $H \cup K = K$; $H \setminus K = \emptyset$;
$K \cap \emptyset = \emptyset$; $H \cap \emptyset = \emptyset$; $K \cup \emptyset = K$;
$K \cup A = A$; $A \setminus H = \overline{H}$; $A \setminus K = \overline{K}$

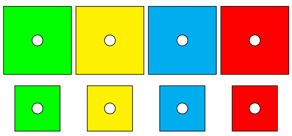
14. Feladat (Logikai lapok két szempont szerinti csoportosítása (3., 4. osztályban már adhatunk hasonló feladatokat)). Elhelyeztük a logikai lapokat a következő táblázatba. Mely lapokra igaz:

a) Lyukas és négyzet?

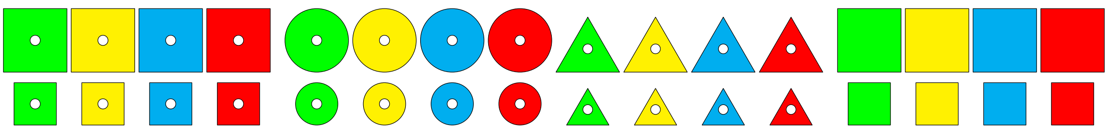
b) Lyukas vagy négyzet?

	Négyzet	Nem négyzet
Lyukas		
Nem lyukas		

Megoldás. *a)* Az összes négyzet, amelyik lyukas.



b) Az összes lyukas elem, valamint a nem lyukas négyzetek is.



Példa. Hol helyezkednek el a lyukas és négyzet elemek?

A lyukas elemek a piros részben helyezkednek el, a négyzetek a kék részben.

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

Azon elemek, amelyek lyukasak is és négyzetek is, a piros és a kék rész közös részében, a lila részben helyezkednek el.

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

15. Feladat. Írja le logikai jelekkel, és jelölje a halmazábrában a következő meghatározásokat!

a) Lyukas és négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

b) Lyukas vagy négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

c) Lyukas, de nem négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

d) Nem lyukas, de négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

e) Lyukas vagy nem négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

f) Lyukas és nem négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

g) Nem igaz, hogy „lyukas vagy négyzet”. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

h) Nem igaz, hogy „lyukas és négyzet”. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

i) Nem lyukas vagy négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

j) Nem lyukas vagy nem négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

k) Nem igaz, hogy „nem lyukas és négyzet”. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

l) Nem igaz, hogy „lyukas és nem négyzet”. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

Megoldás.

a) Lyukas és négyzet. $L \wedge N$	*b)* Lyukas vagy négyzet. $L \vee N$	*c)* Lyukas, de nem négyzet. $L \wedge (\neg N)$	*d)* Nem lyukas, de négyzet. $(\neg L) \wedge N$

a) Lyukas és négyzet. ...

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$		

b) Lyukas vagy négyzet. ...

	N	$\neg N$
L	☺	☺
$\neg L$	☺	

c) Lyukas, de nem négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		☺
$\neg L$		

d) Nem lyukas, de négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$	☺	

a) Azokat az elemeket kell kiválogatni, amelyek egyszerre lyukasak is és négyzetek is, ezek pedig a lyukas négyzetek.

b) Ebben az esetben az összes lyukas, illetve az összes négyzet a megoldáshalmaz. A lyukasak sorához hozzá kell venni a négyzetek oszlopát.

c) Itt az összes olyan lyukas elemre van szükségünk, amelyek nem négyzetek. Amennyiben a logikai készlet elemeit válogatjuk a lyukas kör és a lyukas háromszög a megoldáshalmaz. A halmazábrában a lyukasak és a nem négyzetek közös részét kell jelölni.

d) Az összes olyan négyzet, amelyik nem lyukas.

e) Lyukas vagy nem négyzet. $L \vee (\neg N)$

	N	$\neg N$
L	☺	☺
$\neg L$		☺

f) Lyukas és nem négyzet. $L \wedge (\neg N)$

	N	$\neg N$
L		☺
$\neg L$		

g) Nem igaz, hogy „lyukas vagy négyzet”. $\neg(L \vee N)$

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		☺

h) Nem igaz, hogy „lyukas és négyzet”. $\neg(L \wedge N)$

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

Ez utóbbi két megoldás (*g)* és *h)*) is magyarázatra szorulhat.

Nem igaz, hogy lyukas vagy négyzet. Ebben a mondatban a „Nem igaz” kifejezés után vessző van, ezért a tagadás a „lyukas vagy négyzet”-re vonatkozik, amelyet a matematikában zárójelezéssel szoktunk jelölni. Azaz a $(L \vee N)$ állítást tagadjuk.

Jelöljük a táblázatban először az $L \vee N$ állítást igazzá tevő részeket.

	N	$\neg N$
L	☺	☺
$\neg L$	☺	

Ennek a tagadása éppen a kihagyott mező lesz.

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		☺

Ugyanezen elgondolás alapján a *h)* feladatban a tagadás a $(L \wedge N)$-re vonatkozik. Ezért azt zárójelbe kell tenni.

Jelöljük a táblázatban először a $L \wedge N$ állítást,

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$		

, majd ezt tagadjuk!

	N	$\neg N$
L		☺
$\neg L$	☺	☺

i) Nem lyukas vagy négyzet.
$(\neg L) \vee N$

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$	☺	☺

j) Nem lyukas vagy nem négyzet.
$(\neg L) \wedge (\neg N)$

	N	$\neg N$
L		☺
$\neg L$	☺	☺

k) Nem igaz, hogy „nem lyukas és négyzet”.
$\neg((\neg L) \wedge N)$

	N	$\neg N$
L	☺	☺
$\neg L$	☺	☺

l) Nem igaz, hogy „lyukas és nem négyzet”.
$\neg(L \wedge (\neg N))$

	N	$\neg N$
L	☺	☺
$\neg L$	☺	☺

16. Feladat (Magyarórán, a magas és mély magánhangzók megismerése után adható feladat a komplementer halmaz képzésére.)**.** Sorolja fel a magyar magánhangzókat! Karikázza be a mély magánhangzókat! Hogyan nevezzük azokat a magánhangzókat, amelyeket nem karikázott be?

17. Feladat. Az alaphalmaz a természetes számok halmaza.

Színezze pirossal a számegyenesen a 3 többszöröseit (H halmaz), kékkel a 2 többszöröseit (K halmaz).

a) Mely számokat színezte lilára?

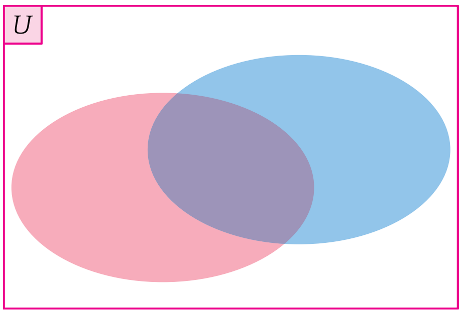
b) Mely számokat színezte ki?

c) Mely számokat színezte pirosra, de kékre nem?

d) Mely számokat színezte kékre, de pirosra nem?

Írja be a halmazábrába 0-tól 20-ig a természetes számokat!

A feladat akkor adható fel, ha a tanulók ismerik a többszörös fogalmat. Azaz ha ismerik a kettes, illetve a 3-as szorzótáblát. Ebből alakíthatjuk ki a 6-os szorzótáblát. Vagy akkor is megoldható a feladat, ha csak az ismételt összeadás fogalmat ismerik.



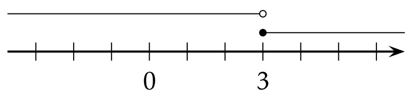
Megoldás. *a)* Pirosra is és kékre is színezett számok a lilára színezettek. A lila számok oszthatók kettővel és hárommal is, azaz osztható hattal is. $K \cap H$

b) Pirosra vagy kékre színezett számok a $K \cup H$ halmaz elemei.

c) Azokat a számokat kell meghatározni, amelyek oszthatók hárommal, de kettővel nem. ezek a páratlan hárommal oszthatók számok. Ebben az esetben a hárommal osztható számok részhalmazát határoztuk meg. $H \setminus K$

d) A hattal nem osztható páros számok halmaza. $K \setminus H$

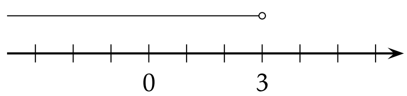
18. Feladat. Legyen az alaphalmaz: *a)* $\mathbf{N}$ = {Természetes számok} *b)* $\mathbf{Z}$ = {Egész számok} *c)* $\mathbf{R}$ = {Valós számok}

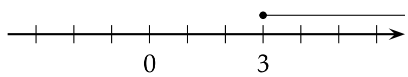


Mely számok halmazát jelzi a számegyenes fölé rajzolt (kezdőpont nélküli) félegyenes?

Mely számok halmazát jelzi a számegyenes fölé rajzolt (kezdőponttal együtt) félegyenes?

Megoldás.





a)	0, 1, 2, 3, ...	3, 4, 5, 6, ...
b)	... −3, −2, −1, 0, 1, 2	3, 4, 5, 6, ...
c)	a szám < 3	a szám ≥ 3

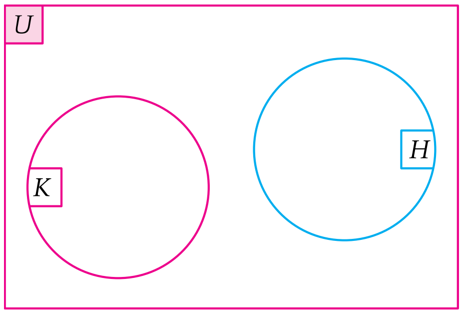
6. Válogatások több szempont szerint (Köves Gabriella)

Egy szempontú válogatás esetében azt kellett eldönteni, hogy az adott elem rendelkezik-e vagy nem a szempontban megadott tulajdonsággal, illetve melyik az a tulajdonság, amellyel rendelkeznek vagy éppen nem rendelkeznek az adott elemek. Több szempontú válogatás esetében ugyanezt a tevékenységet végezzük. Először az egyik szempont szerint döntjük el, hogy az elem rendelkezik-e az adott tulajdonsággal, vagy nem, azután a másik szerint, és így haladunk tovább az összes szempont alapján. Lényegesen nehezebb, de jól algoritmizálható az ilyen típusú feladat.

6.1. Két szempontú válogatások előkészítése

Első lépésként úgy adjuk meg vagy az alaphalmaz elemeit, vagy a válogatás két szempontját, hogy ne legyen olyan elem, amelyik megfelel mind a két válogatási szempontnak, ugyanakkor olyan se legyen, amelyik egyik szempontnak sem felel meg.

Példa.



Válogasd külön az osztály tanulói közül a fiúkat és a lányokat!

Válogasd külön az adott élőlények közül a növényeket és az állatokat!

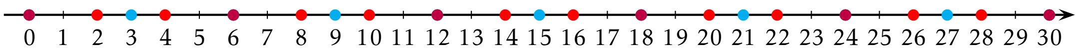
Megjegyzés. Az ilyen típusú válogatáshoz a mellékelt halmazábra jól használható.

Később legyen az elemek között olyan vagy olyanok, amelyek rendelkeznek mind a két válogatási szempontnak megfelelő tulajdonsággal. Ezeket az elemeket nem tudjuk elhelyezni az előbb megadott halmazábrában. Ellentmondáshoz jutottunk, változtatni kell az előbbi ábránkon.

Példa. A 30-nál kisebb (természetes) számok közül válogassuk ki a 2-vel osztható, illetve a 3-mal osztható számokat!

A feladat megoldásához eszközként használhatunk például számegyenest, táblázatot, Venn-diagramot.

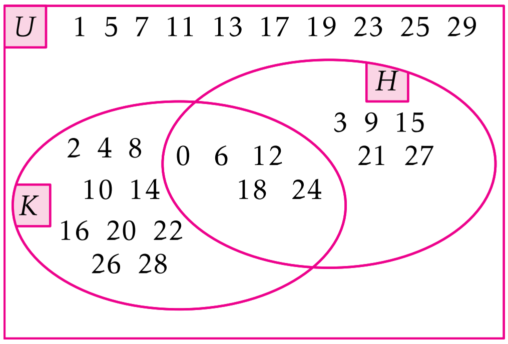
Jelöljük a számegyenesen a kettő többszöröseit pirossal, a három többszöröseit kékkel! A számegyenesről leolvasható, hogy az egyik tulajdonsággal sem rendelkező elemek azok, amelyeket nem jelöltünk meg. A mindkét tulajdonsággal rendelkező elemek pedig azok, amelyeket pirossal is *és* kékkel is, azaz lilával jelöltünk meg.



Írjuk be a táblázat megfelelő celláiba a számokat 0-tól 29-ig!

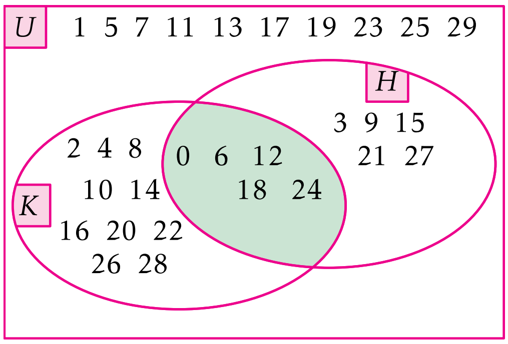
	2-vel osztható számok	2-vel nem osztható számok
3-mal osztható számok	0, 6, 12, 18, 24,	3, 9, 15, 21, 27,
3-mal nem osztható számok	2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28,	1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29

A feladat *Venn-diagrammal* szemléltetve:

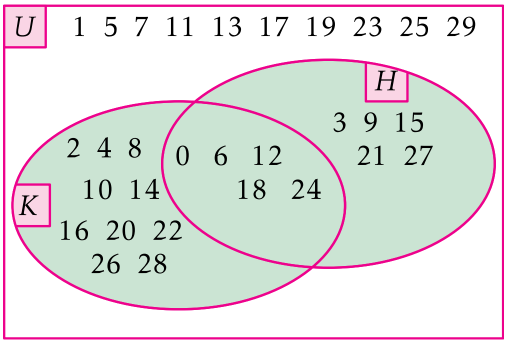


Az ilyen típusú feladatokkal a tanulók tapasztalatot szerezhetnek a halmazműveletekről és a logikai műveletekről egyaránt.

A két halmaz *közös részébe* (metszetébe) írjuk azokat a számokat, amelyek mind a két tulajdonsággal rendelkeznek, azaz oszthatók 2-vel is **és** 3-mal is. (A számegyenesen a lilára színezett számok, a táblázatban a bal felső cellában lévő számok.)



Ha azt kérdezzük, hogy melyek azok a számok, amelyek legalább az egyik tulajdonságnak megfelelnek, azaz oszthatók kettővel vagy hárommal. Pontosan azokról a számokról beszélünk, amelyeket megjelöltünk a számegyenesen valamilyen színnel, illetve amelyeket a Venn-diagramban a beszínezett részbe soroltunk.



A vagy szó használatával óvatosan kell bánnunk, mert a magyar nyelv ezt a szót kizáró értelemben is használja (lásd előbb, és a szimmetrikus különbségnél).

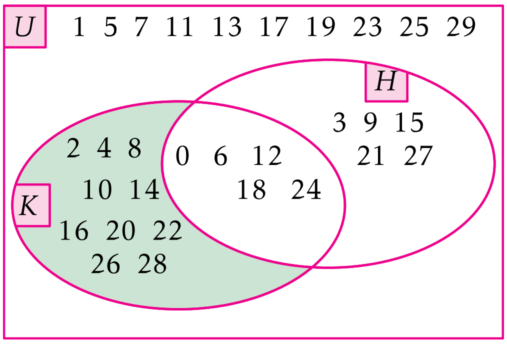
A metszet és az unió műveletek alkalmazásakor a tanulók tapasztalatot szerezhetnek e műveletek kommutatív tulajdonságáról is.

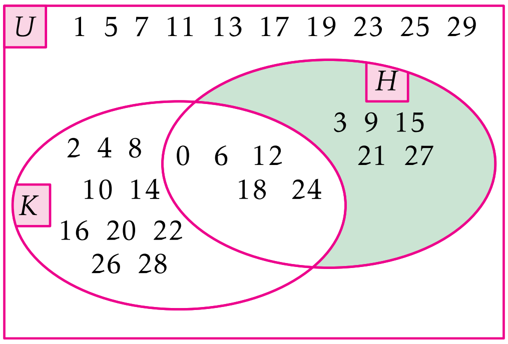
Ha a kérdésünk az, hogy:

Melyek azok a számok, amelyek oszthatók 2-vel, de 3-mal nem? vagy

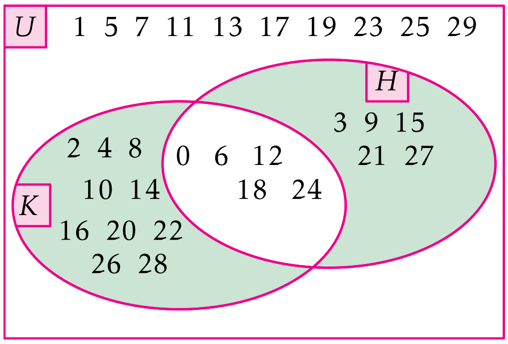
Melyek azok a számok, amelyek oszthatók 3-mal, de 2-vel nem?

akkor e két művelet alkalmazásával tapasztalatot szerezhetnek a tanulók arról, hogy az A és B halmaz különbséghalmaza nem egyezik meg a B és A halmaz különbséghalmazával, azaz ez a művelet nem rendelkezik a kommutatív tulajdonsággal.





Legyen most a kérdésünk az, hogy „Melyek azok a számok, amelyek a két megadott feltétel közül pontosan az egyiknek felelnek meg?”, azaz melyek azok a számok, amelyek oszthatók 2-vel vagy 3-mal, de nem oszthatók 2-vel és 3-mal, azaz nem oszthatók 6-tal. Ez az állítás kifejezi, hogy a két állítás (az A és a B ítélet) logikai értéke egyidejűleg nem lehet igaz, illetve egyidejűleg nem lehet hamis.



Megjegyzés. Már a kezdeti időszakban, a konkrét tulajdonságok felsorolásakor is szoktassuk a tanulókat a halmazelméletben és a matematikai logikában megszokott kifejezések pontos használatára (nem, és, vagy, mindegyik, van olyan, egyik sem, a halmazok része, közös része, egyesített része stb.).

6.2. Két szempontú válogatás

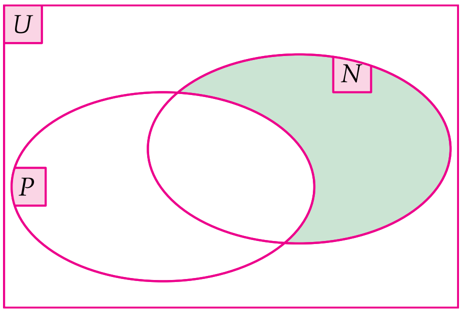
A *két szempontú válogatások során* egyidejűleg négy tulajdonságot kell figyelembe vennünk. Az egyik és a másik szempont meglétét vagy meg nem létét. Az így kapott 4 részhalmaz mindegyike kifejezhető halmazműveletekkel:

	Az egyik állítás igaz	Az egyik állítás hamis
A másik állítás igaz	I. mindkét szempontnak megfelelő elemek halmaza (a két halmaz metszete)	III. pontosan a másik szempontnak megfelelő elemek halmaza (a két halmaz különbsége)
A másik állítás hamis	II. pontosan az egyik szempontnak megfelelő elemek halmaza (a két halmaz különbsége)	IV. egyik szempontnak sem megfelelő elemek halmaza (a két halmaz uniójának komplementere)

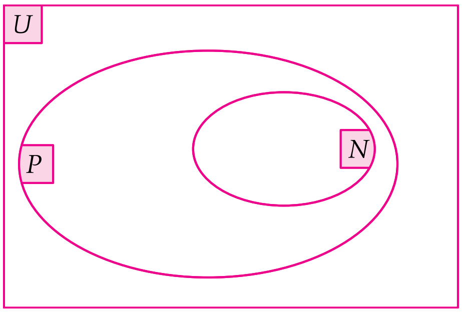
A két megadott szempont természetesen lehet olyan is, hogy a fenti négy tulajdonságnak megfelelő részhalmazok közül egybe vagy többe nem kerül elem. Ha a II. vagy III. tartomány marad üresen, akkor a B halmaz részhalmaza az A-nak, vagy az A részhalmaza a B-nek. Ha az I. tartomány üres, akkor az A és B halmaz diszjunkt, nincs közös elemük. Ha a IV. tartomány üres, akkor az alaphalmaz 2 részhalmazra osztályozásáról beszélünk.

Példa. A 30-nál kisebb természetes számok közül válogassuk ki a párosakat (P), illetve a 4-gyel oszthatókat (N)!

A válogatás során megállapítjuk, hogy minden 4-gyel osztható szám osztható 2-vel is, azaz páros. A számokat bekarikázhatjuk például pirossal és kékkel, vagy jelölhetjük a számegyenesen vagy halmazábrán. Ez utóbbi esetben kétféle megjelenése is lehet a halmazábránknak.

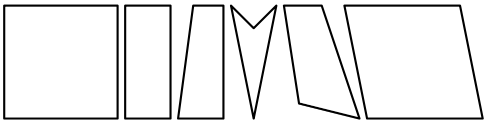


Ebben az esetben tapasztalatot szerzünk a részhalmaz és az üres halmaz fogalmáról. (A színezett részbe nem kerül elem.)



Ebben az esetben az ábrán nem jelenik meg az üres halmaz, de megtapasztaltathatjuk a részhalmaz, valamint az egymásba skatulyázott halmazok fogalmát.

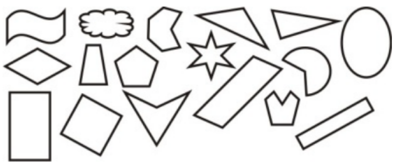
Példa. Válogassuk ki a felsorolt síkidomok közül a négyszögeket, illetve a téglalapokat! Fogalmazza meg saját szavaival, hogy milyen síkidomok kerültek a fenti ábrák egy-egy részébe!

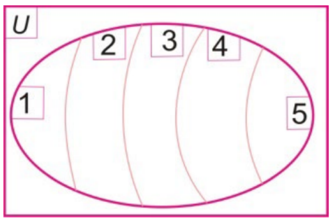


6.3. Az osztályozás

A több szempontú válogatások közül a legegyszerűbb eset az osztályozás, azaz ha diszjunkt halmazokba válogatunk. Másként fogalmazva az alaphalmaz elemei között nincs olyan, amely egynél több szempontnak felel meg.

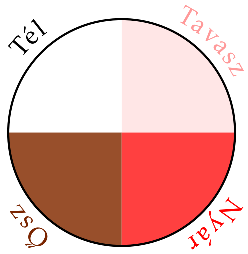
Példa. Az adott alakzatokat válogassuk szét aszerint, hogy hány egyenes vonal határolja őket!





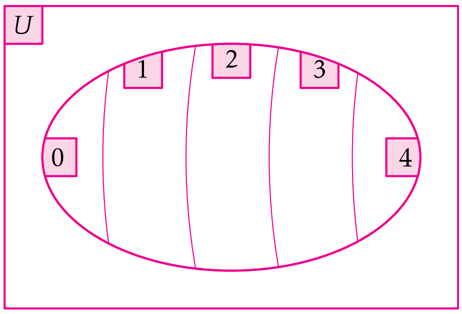
Ha az alaphalmaz mindegyik elemét be tudjuk sorolni valamelyik diszjunkt részhalmazba, akkor az alaphalmaz osztályozásáról beszélünk. Ehhez vagy az alaphalmaz elemeit, vagy a válogatás szempontjait kell megfelelően kiválasztanunk.

Példa. Helyezd el a kördiagramba a hónapok nevét (tél, tavasz, nyár, ősz)!



Helyezd el a kördiagramba a tárgyakat aszerint, hogy melyik évszakra jellemzők! A tárgyak lehetnek például karácsonyfa, télikabát, nyuszi tojással, tavaszi virág, fürdőruha, napernyő, napozóágy, cseresznye, lehulló őszi falevelek, „a te születésnapod” stb. Nem lehet olyan tárgy, amely legalább két halmazba is elhelyezhető, például edzőcipő, zokni.

Példa. Helyezd el a számokat 20-tól 35-ig a halmazábrába aszerint, hogy 5-tel osztva mennyit adnak maradékul (0, 1, 2, 3, 4)!

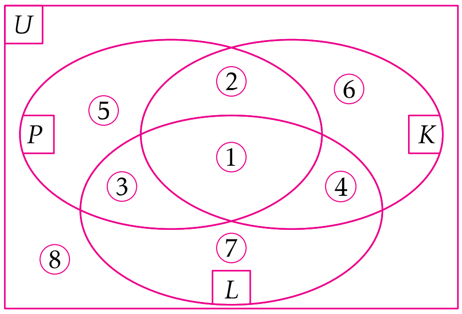


Megjegyzés. A feladatban szereplő részhalmazokat az 5-tel való osztás maradékosztályainak nevezzük.

6.4. Három szempontú válogatás

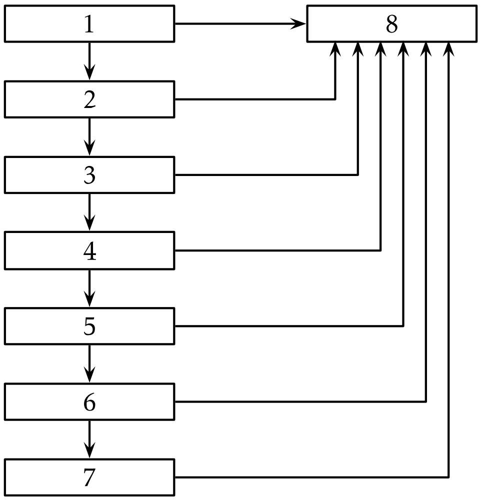
A több szempontú válogatások közül – tekintettel a probléma bonyolultságára – általánosan csak a három szempontú válogatásokkal foglalkozunk az alapozó évfolyamokon. Hasonlóan a két szempontú válogatáshoz ebben az esetben is sorra vesszük, hogy az elem rendelkezik-e az egyik, a másik, a harmadik tulajdonsággal, vagy sem.

Példa. Helyezd el az ábrába (U) a logikai készlet elemeit! $P = \{\text{Piros elemek}\}$, $K = \{\text{Kicsi elemek}\}$, $L = \{\text{Lyukas elemek}\}$.



A válogatás során összesen 8 tulajdonságot kell vizsgálnunk a következő algoritmus szerint:

1. Megnézzük, hogy a kiválasztott elem megfelel-e mind a három tulajdonságnak. Ha igen, elhelyezzük az 1-es részhalmazba, és vesszük a következő elemet. Ha nem,



2. megnézzük, hogy az elem piros és kicsi-e, ugyanakkor nem lyukas. Ha igen, elhelyezzük a 2-es részhalmazba, és vesszük a következő elemet. Ha nem,
3. megnézzük, hogy az elem piros és lyukas-e, de nem kicsi. Ha igen, elhelyezzük a 3-as részhalmazba, és vesszük a következő elemet. Ha nem,
4. megnézzük, hogy az elem kicsi és lyukas-e, de nem piros. Ha igen, elhelyezzük a 4-es részhalmazba, és vesszük a következő elemet. Ha nem,
5. megnézzük, hogy az elem piros és nem kicsi és nem lyukas-e. Ha igen, elhelyezzük az 5-ös részhalmazba, és vesszük a következő elemet. Ha nem,

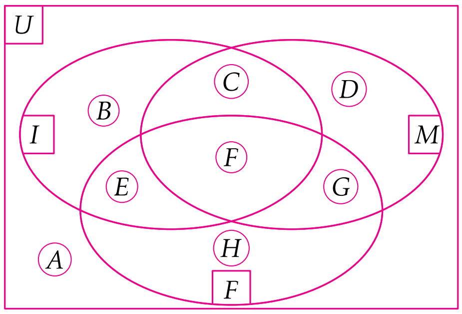
6. megnézzük, hogy az elem kicsi és nem piros és nem lyukas-e. Ha igen, elhelyezzük a 6-os részhalmazba, és vesszük a következő elemet. Ha nem,

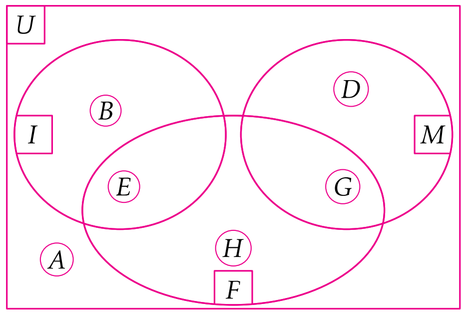
7. megnézzük, hogy az elem lyukas és nem piros és nem kicsi-e. Ha igen, elhelyezzük a 7-es részhalmazba, ha nem, elhelyezzük a 8-as részhalmazba.

Megjegyzés. Válogathatunk számokat például 2-vel, 3-mal, 5-tel oszthatóságuk szerint. Ekkor a feladat a számelmélet témakörébe is tartozik. Válogathatunk síkidomokat különböző geometriai tulajdonságok alapján: például négyszög, van két egyenlő szöge, van derékszöge. Ekkor a feladat a megfelelő geometriai fogalmak kialakítását is szolgálja.

Adjunk példát olyan három szempontú válogatásra is, amelynél a halmazba rendezés eredményeképpen a fenti 8 tartomány között üres vagy üresek is lesznek.

Példa. Írd be a halmazábrába az alábbi szavakat: fut, ég, bolond, és, tűz, asztal, beszél, erős, kettő! (I = Ige, F = Főnév, M = Melléknév)





Megoldás. A = {és, kettő},

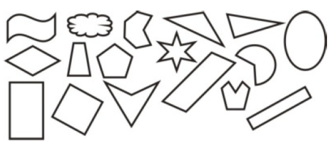
B = {fut, beszél}, D = {erős}

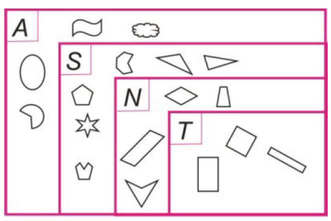
E = {ég, tűz}, G = {bolond}

H = {asztal}, a C és az F üres halmazok.

A több szempontú válogatások értelmezése abban az esetben a legnehezebb, ha a válogatás szempontjai olyanok, hogy eredményeképpen egymásba skatulyázott halmazokat kapunk. Az ilyen típusú válogatás a fogalmi rendszerek kialakulását, a fogalmak hierarchiájának megértését is szolgálja.

Példa. Helyezd el a megadott síkidomokat a halmazábrába!





U = {Síkidomok}, S = {Sokszögek}, N = {Négyszögek}, T = {Téglalapok}.

Megjegyzés. A feladattal a síkidomok rendszerezését gyakoroltatjuk, példák és ellenpéldák segítségével értelmezzük a síkidom, sokszög, négyszög fogalmakat, és vizsgáljuk a fogalmak közötti kapcsolatokat.

Ahogyan az egy szempontú válogatásoknál, a két vagy több szempontú válogatásoknál is többféle feladattípust alkalmazhatunk. A gyerekek válogathatnak saját maguk által kitalált szempontok alapján, de adott szempontok alapján is. Utóbbi esetben a feladatok további két csoportba sorolhatók: Adott a szempont (a halmaz „címkéje"), és a feladat a megfelelő elemek megtalálása, vagy néhány elemet kiválogatunk, és elhelyezzük a halmazábrába. Ekkor a tanulók feladata a címkék megnevezése és a többi elem elhelyezése a halmazábrába. A szempontok felismerése azonban a szempontok számának növekedésével nagyon megnehezítheti a feladatot, ezért több szempontú válogatás esetén a leggyakoribb feladattípus az, amikor adott szempont mellett végezzük az elemek halmazokba rendezését.

7. Az elemi ítéletkalkulus és a halmazműveletek műveleti tulajdonságai (Köves Gabriella)

Az ítéletek közti műveletek esetén és a halmazok közötti műveletek esetén is érvényesek bizonyos műveleti tulajdonságok.

7.1. Idempotencia (formális logikai elnevezése: a tautológia törvényei)

Bármely P esetén $P \wedge P = P$, $P \vee P = P$.

Mivel a P tetszőleges ítélet, ezért kétféle logikai értéke lehet („igaz" vagy „hamis").

	$P \wedge P = P$	$P \vee P = P$
P: i	$\mathrm{i} \wedge \mathrm{i} = \mathrm{i}$	$\mathrm{i} \vee \mathrm{i} = \mathrm{i}$
P: h	$\mathrm{h} \wedge \mathrm{h} = \mathrm{h}$	$\mathrm{h} \vee \mathrm{h} = \mathrm{h}$

Halmazműveletek idempotens (elnyelési) tulajdonsága.

$$A \cap A = A \cup A = A$$

7.2. Kommutativitás (felcserélhetőség)

Bármely P és bármely Q ítélet esetén $P \wedge Q = Q \wedge P$, $P \vee Q = Q \vee P$.

Mivel a P tetszőleges ítélet, ezért kétféle logikai értéke lehet („igaz” vagy „hamis”). A P logikai értékétől függetlenül a Q ítéletnek szintén kétféle logikai értéke lehet. Végeredményben $2 \cdot 2 = 4$-féleképpen alakulhatnak a logikai értékek.

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$
i	i	i	i
i	h	h	h
h	i	h	h
h	h	h	h

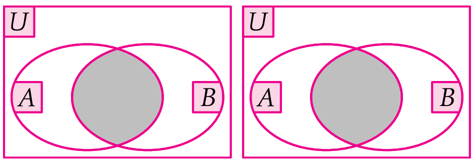
A $P \wedge Q$ és a $Q \wedge P$ oszlopok logikai értéke rendre megegyezik, tehát igaz az egyenlőség.

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$
i	i	i	i
i	h	i	i
h	i	i	i
h	h	h	h

A $P \vee Q$ és a $Q \vee P$ oszlopok logikai értéke rendre megegyezik, tehát igaz az egyenlőség.

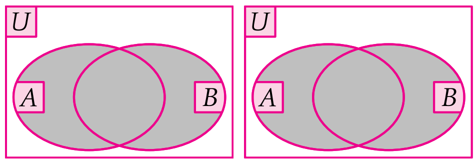
Halmazműveletek kommutatív tulajdonsága:

$A \cap B = B \cap A$



A két halmaz (szürke rész) megegyezik, tehát láttattuk, hogy igaz az egyenlőség

$A \cup B = B \cup A$



A két halmaz (szürke rész) megegyezik, tehát láttattuk, hogy igaz az egyenlőség.

7.3. De Morgan azonosságok

Bármely P és bármely Q ítélet esetén

$$\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q), \qquad \neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

Nézzük az első azonosságot! A P és Q tetszőleges ítéletek, mindkettőnek két-két féle logikai értéke lehet („igaz” vagy „hamis”). Így $2 \cdot 2 = 4$-féleképpen alakulhatnak a logikai értékek.

Ábrázoljuk a $\neg(P \wedge Q)$ lehetséges logikai értékeit. Először végezzük el a zárójelben lévő műveletet, majd tagadjuk azt.

<table>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P \wedge Q$</th><th rowspan="5">Tagadjuk a zárójelben lévő logikai értékeket.</th><th>$\neg(P \wedge Q)$</th></tr>
<tr><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>h</td></tr>
<tr><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>i</td></tr>
<tr><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>i</td></tr>
<tr><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>i</td></tr>
</table>

Vizsgáljuk meg a másik oldalt: $(\neg P) \vee (\neg Q)$. Először tagadjuk P-t, majd Q-t. Ezekkel az értékekkel végezzük el a diszjunkciót.

P	Q		$\neg P$	$\neg Q$		$(\neg P) \vee (\neg Q)$
i	i	Tagadjuk P-t, és tagadjuk Q-t	h	h	Végezzük el a diszjunkciót.	h
i	h		h	i		i
h	i		i	h		i
h	h		i	i		i

A két táblázat utolsó oszlopai megegyeznek, tehát beláttuk az azonosságot.

Az előzőeket egy táblázatba írva:

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
i	i	i	**h**	h	h	**h**
i	h	h	**i**	h	i	**i**
h	i	h	**i**	i	h	**i**
h	h	h	**i**	i	i	**i**

A $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$ logikai értékeit önállóan írják be.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
i	i					
i	h					
h	i					
h	h					

Megoldás.

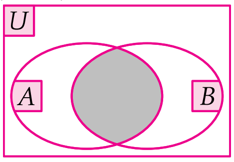
P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
i	i	i	**h**	h	h	**h**
i	h	i	**h**	h	i	**h**
h	i	i	**h**	i	h	**h**
h	h	h	**i**	i	i	**i**

A $\neg(P \vee Q)$, illetve a $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ oszlopaiban a logikai értékek rendre megegyeznek, tehát beláttuk az azonosságot.

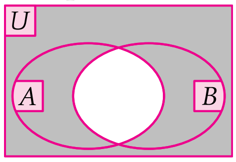
Halmazműveletek de Morgan tulajdonsága

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

Először az $A \cap B$-t jelöljük.

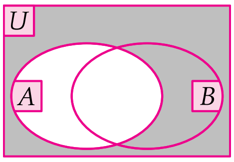


Majd az $(A \cap B)$ komplementerét.

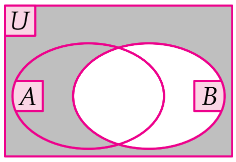


Nézzük az azonosság másik oldalát.

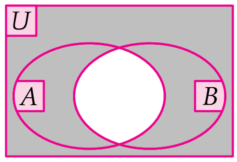
A komplementere, $\overline{A}$



B komplementere, $\overline{B}$



Előzőek uniója, $\overline{A} \cup \overline{B}$

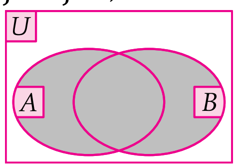


Látható, hogy az A metszet B $(A \cap B)$ komplementere megegyezik az A komplementere és B komplementere uniójával.

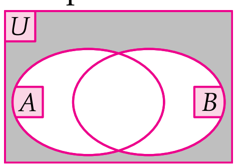
19. Feladat. Lássuk be önállóan a következő azonosságot: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Megoldás.

Először az $A \cup B$-t jelöljük,

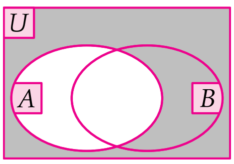


majd az $A \cup B$-nek a komplementerét.

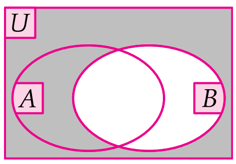


Nézzük az azonosság másik oldalát.

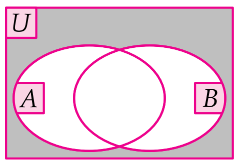
A komplementere, $\overline{A}$



B komplementere, $\overline{B}$



Előzőek metszete, $\overline{A} \cap \overline{B}$



A halmazábrákon látható, hogy az A unió B $(A \cup B)$ komplementere megegyezik az A komplementere és B komplementere metszetével.

7.4. Asszociativitás (csoportosíthatóság más szóval társíthatóság)

Bármely A, bármely B és bármely C ítélet esetén

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.

Tetszőleges A, B és B ítélet esetén $2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 8$-féleképpen alakulhatnak a logikai értékek.

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th rowspan="9">Először az $(A \wedge B)$ logikai értékét határozzuk meg.</th><th>$(A \wedge B)$</th><th rowspan="9">Második lépésként az $(A \wedge B) \wedge C$ logikai értékét határozzuk meg.</th><th>$(A \wedge B) \wedge C$</th></tr>
<tr><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td></tr>
<tr><td>i</td><td>i</td><td>h</td><td>i</td><td>h</td></tr>
<tr><td>i</td><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>i</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
</table>

Nézzük az azonosság jobb oldalát!

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th rowspan="9">Először a $(B \wedge C)$ logikai értékét határozzuk meg.</th><th>$(A \wedge B)$</th><th rowspan="9">Második lépésként az $A \wedge (B \wedge C)$ logikai értékét határozzuk meg</th><th>$(A \wedge B) \wedge C$</th></tr>
<tr><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td></tr>
<tr><td>i</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>i</td><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
</table>

Egybe rendezve a két táblázatot:

A	B	C	$(A \wedge B)$	$(A \wedge B) \wedge C$	$(B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C$
i	i	i	i	**i**	i	**i**
i	i	h	i	**h**	h	**h**
i	h	i	h	**h**	h	**h**
i	h	h	h	**h**	h	**h**
h	i	i	h	**h**	i	**h**
h	i	h	h	**h**	h	**h**
h	h	i	h	**h**	h	**h**
h	h	h	h	**h**	h	**h**

Az $(A \wedge B) \wedge C$ és az $(A \wedge B) \wedge C$ oszlopok logikai értéke rendre megegyezik, azaz beláttuk az azonosságot.

20. Feladat. Az $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ azonosság bizonyítását önállóan végezzük el.

A	B	C	$(A \vee B)$	$(A \vee B) \vee C$	$(B \vee C)$	$A \vee (B \vee C)$

Megoldás.

A	B	C	$(A \vee B)$	$(A \vee B) \vee C$	$(B \vee C)$	$A \vee (B \vee C)$
i	i	i	i	**i**	i	**i**
i	i	h	i	**i**	i	**i**
i	h	i	i	**i**	i	**i**
i	h	h	i	**i**	h	**i**
h	i	i	i	**i**	i	**i**
h	i	h	i	**i**	i	**i**
h	h	i	h	**i**	i	**i**
h	h	h	h	**h**	h	**h**

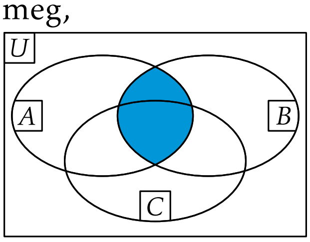
Az $(A \vee B) \vee C$ és a $(A \vee B) \vee C$ oszlopok logikai értéke rendre megegyezik, azaz beláttuk az azonosságot.

A halmazműveletek asszociatív műveleti tulajdonságai

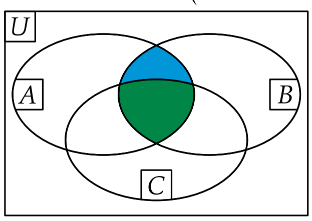
Bármely A, bármely B és bármely C halmaz esetén $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Az azonosság egyik oldala:

Először az $(A \cap B)$ halmazt jelöljük meg,

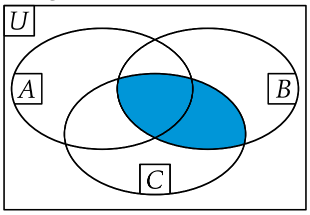


majd az $(A \cap B)$ halmaz metszetét a C halmazzal (a zöld rész).

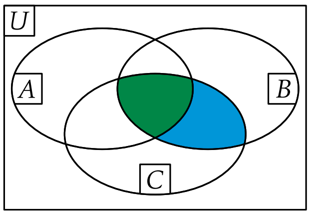


Az azonosság másik oldala:

Először a $(B \cap C)$ halmazt jelöljük meg,



majd a $(B \cap C)$ halmaz metszetét az A halmazzal (a zöld rész).

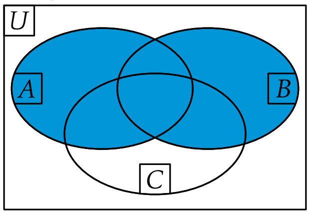


A két halmaz $(A \cap B) \cap C$ és $A \cap (B \cap C)$ megegyezik. Azaz szemléletesen beláttuk az azonosságot.

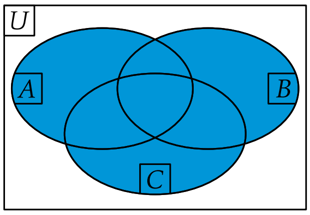
21. Feladat. Önállóan lássa be az azonosságot! Bármely A, bármely B és bármely C halmaz esetén $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Megoldás.

Először az $(A \cup B)$ halmazt jelöljük meg,

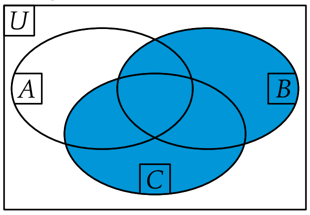


majd az $(A \cup B)$ halmaz unióját a C halmazzal (a zöld rész).

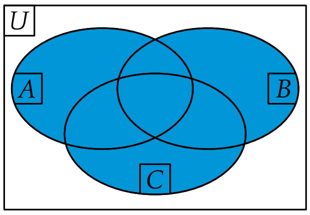


Az azonosság másik oldala:

Először a $(B \cup C)$ halmazt jelöljük meg,



majd a $(B \cup C)$ halmaz metszetét az A halmazzal (a zöld rész).



A két halmaz, az $(A \cup B) \cup C$ és az $A \cup (B \cup C)$ megegyezik. Azaz szemléletesen beláttuk az azonoságot.

7.5. Disztributivitás

Bármely A, bármely B és bármely C ítélet esetén $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th rowspan="9">Először a $(B \vee C)$ logikai értékét határozzuk meg.</th><th>$(B \vee C)$</th><th rowspan="9">Második lépésként az $A \wedge (B \vee C)$ logikai értékét határozzuk meg.</th><th>$A \wedge (B \vee C)$</th></tr>
<tr><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td></tr>
<tr><td>i</td><td>i</td><td>h</td><td>i</td><td>i</td></tr>
<tr><td>i</td><td>h</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td></tr>
<tr><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>i</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>h</td><td>i</td><td>i</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
</table>

Határozzuk meg az azonosság jobb oldalának logikai értékét is. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th rowspan="9">Először az $(A \wedge B)$ logikai értékét határozzuk meg.</th><th>$(A \wedge B)$</th><th rowspan="9">Második lépésként az $(A \wedge C)$ logikai értékét határozzuk meg.</th><th>$(A \wedge C)$</th><th rowspan="9">Harmadik lépés az $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ logikai értékének meghatározása. Az előző két oszlop konjunkciója.</th><th>$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$</th></tr>
<tr><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td><td>i</td></tr>
<tr><td>i</td><td>i</td><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>i</td></tr>
<tr><td>i</td><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>i</td><td>i</td></tr>
<tr><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>i</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>h</td><td>i</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
<tr><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td><td>h</td></tr>
</table>

Az $A \wedge (B \vee C)$ és az $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ kijelentések logikai értéke megegyezik, így beláttuk az azonosságot.

22. Feladat. Bármely A, bármely B és bármely C ítélet esetén $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. Bizonyítását önállóan végezzék el!

A	B	C	$(B \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B)$	$(A \vee C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Megoldás.

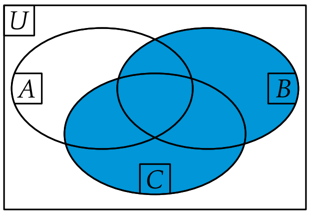
A	B	C	$(B \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B)$	$(A \vee C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
i	i	i	i	**i**	i	i	**i**
i	i	h	h	**i**	i	i	**i**
i	h	i	h	**i**	i	i	**i**
i	h	h	h	**i**	i	i	**i**
h	i	i	i	**i**	i	i	**i**
h	i	h	h	**h**	i	h	**h**
h	h	i	h	**h**	h	i	**h**
h	h	h	h	**h**	h	h	**h**

Az $A \vee (B \wedge C)$ és a $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ kijelentések logikai értéke megegyezik, igy beláttuk az azonosságot.

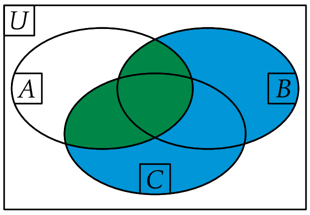
A halmazműveletek disztributivitás műveleti tulajdonságai

Bármely A, bármely B és bármely C halmaz esetén $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Először a $(B \cup \mathrm{C})$ halmazt jelöljük meg,

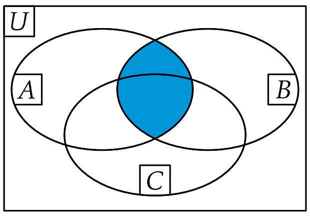


majd az A halmaz metszetét a $(B \cup C)$-vel (a zöld rész).

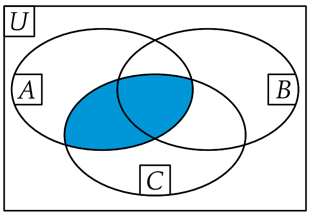


Az azonosság másik oldala:

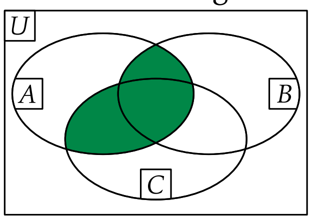
Először az $(A \cap B)$ halmazt jelöljük meg,



majd az $(A \cap C)$ halmazt,



végül e kettő unióját, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$-t határozzuk meg.

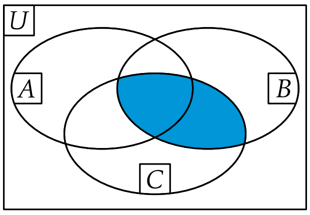


23. Feladat. A következő azonosság szemléltetését önállóan végezzék el!

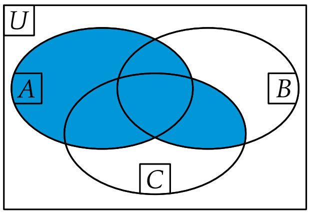
Bármely A, bármely B és bármely C halmaz esetén $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Megoldás. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Először a $(B \cap C)$ halmazt jelöljük meg,

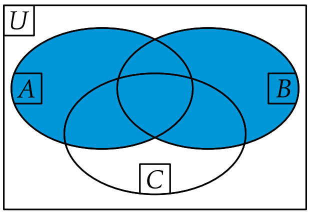


majd az A halmaz unióját a $(B \cap C)$-vel (a zöld rész).

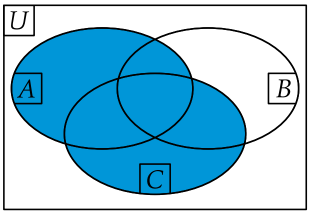


Az azonosság másik oldala:

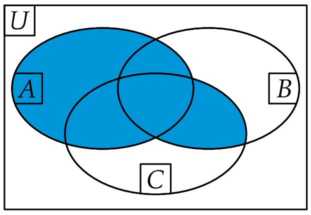
Először az $(A \cup B)$ halmazt jelöljük meg,



majd az $(A \cup C)$ halmazt,



végül e kettő metszetét, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$-t határozzuk meg.

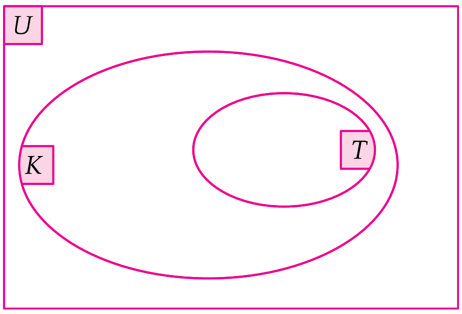


Látható, hogy az $A \cup (B \cap C)$ és az $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ halmazok megegyeznek.

24. Feladat. A természetes számok halmaza az alaphalmaz. Legyen $T = \{$a 10-zel osztható számok$\}$, a $K = \{$2-vel osztható számok$\}$ halmaza. Mi a metszete, uniója és az ilyen sorrendben vett különbsége a két halmaznak?

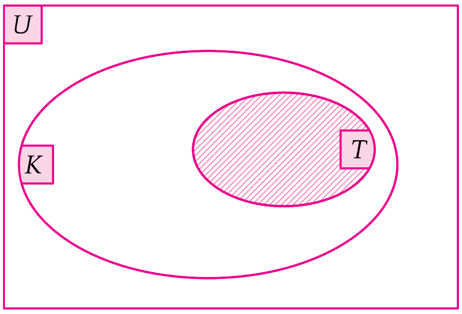
Második osztálytól már adható ez a feladat az alaphalmaz változtatásával. Például úgy, hogy az alaphalmaz a 100-nál nem nagyobb számok halmaza, vagy a 100-nál kisebb számok halmaza.

Megoldás. $T = \{0, 10, 20, \ldots\}$; $K = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$; $T \cap K = T$; $T \cup K = K$; $T \setminus K = \emptyset$.

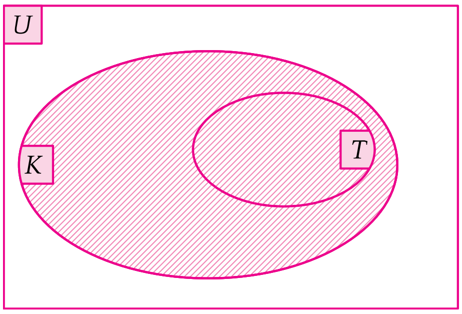


Szemléltetve:

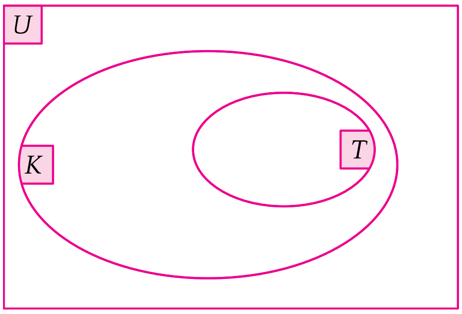
$T \cap K = T$



$T \cup K = K$



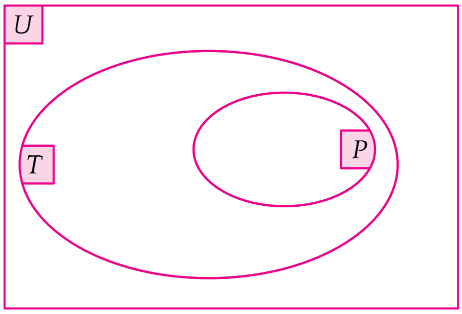
$T \setminus K = \emptyset$



25. Feladat. A négyszögek halmaza az alaphalmaz. Legyen $T = \{\text{Trapézok}\}$, $P = \{\text{Paralelogrammák}\}$. A $T = \{\text{Trapézok}\}$, illetve $P = \{\text{Paralelogrammák}\}$ halmazának mi a metszete, uniója és az ilyen sorrendben vett különbsége?

Megoldás.

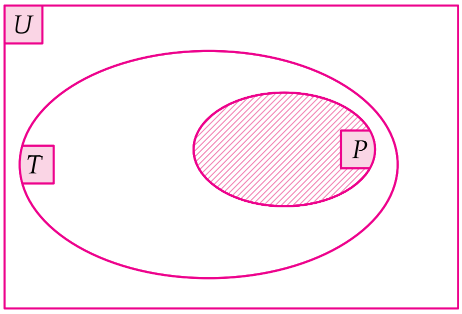
$T = \{\text{Van párhuzamos oldalpárja}\}$; $P = \{\text{Szemben lévő oldalai párhuzamosak}\}$. Ebből következik, hogy $P \subseteq T$ – minden paralelogramma trapéz.



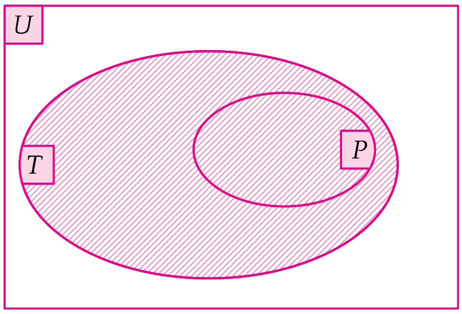
$T \cap P = P$; $T \cup P = T$; $T \setminus P =$ {általános trapéz, húrtrapéz és derékszögű trapéz}.

Szemléltetve:

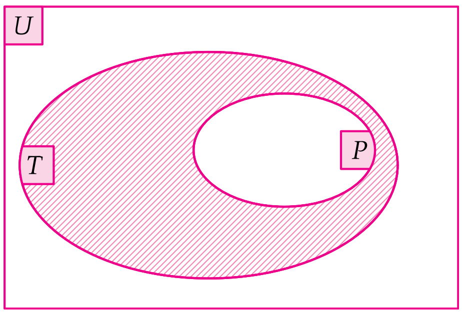
$T \cap P = P$



$T \cap P = T$



$T \setminus K$



8. Az implikáció és az ekvivalencia (Köves Gabriella)

26. Feladat (Logikai lapok két szempont szerinti csoportosítása (3., 4. osztályban adhatunk hasonló feladatokat))**.** Helyezze el a logikai lapokat a táblázatban! A táblázat mely részében lévő lapokra igaz a kijelentés? Vonalkázza be a táblázat megfelelő részét! Írja le logikai jelekkel is az egyes nyitott mondatokat!

Jelölés: $L = \{$A ... lap lyukas$\}$; $N = \{$A ... lap négyzet$\}$.

A táblázat mely részében lévő lapokra igaz a kijelentés? Jelölje be a táblázat megfelelő részét!

a) Ha lyukas, akkor négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

b) Ha négyzet, akkor lyukas. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

c) Ha nem négyzet, akkor nem lyukas. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

d) Ha nem lyukas, akkor nem négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

e) Nem lyukas vagy négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

f) Ha négyzet, akkor lyukas, és ha lyukas, akkor négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

g) Akkor és csakis akkor lyukas, ha négyzet. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

h) Akkor és csakis akkor négyzet, ha lyukas. ...

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$		

Megoldás.

a) Ha lyukas, akkor négyzet.

Egyrészt, az összes lyukas elemből ki kell választani a négyzeteket. Ezeket az elemeket a táblázatba elhelyezzük.

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$		

A nem lyukas elemekrőn nem állítottunk semmit, ezért azok lehetnek négyzetek is és nem négyzetem is. Azaz az összes nem lyukas elemet el tudjuk helyezni a táblázatba.

	N	$\neg N$
L		
$\neg L$	☺	☺

A megoldás:

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$	☺	☺

f) Ha négyzet, akkor lyukas, és ha lyukas, akkor négyzet.

Ha nem négyzet, akkor csak nem lyukas lehet. Így a megoldás:

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$		☺

a) Ha lyukas, akkor négyzet. ...

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$	☺	☺

b) Ha négyzet, akkor lyukas. ...

	N	$\neg N$
L	☺	☺
$\neg L$		☺

c) Ha nem négyzet, akkor nem lyukas. ...

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$	☺	☺

d) Ha nem lyukas, akkor nem négyzet. ...

	N	$\neg N$
L	☺	☺
$\neg L$		☺

e) Nem lyukas vagy négyzet. ...

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$	☺	☺

f) Ha négyzet, akkor lyukas, és ha lyukas, akkor négyzet. ...

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$		☺

g) Akkor és csakis akkor lyukas, ha négyzet. ...

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$		☺

h) Akkor és csakis akkor négyzet, ha lyukas. ...

	N	$\neg N$
L	☺	
$\neg L$		☺

27. Feladat. Mikor tartjuk igaznak a gyakorlatvezető következő kijelentését?

„Ha Aladár jeles dolgozatot írt akkor Aladár jelest kap félévkor.”

(Figyeljük meg, hogy az előtag, illetve az utótag különböző logikai értékei mellett, hogyan alakul az összetett ítélet logikai értéke!)

Önállóan töltse ki a táblázatot!

	Előtag		Utótag	Összetett kijelentés
Ha	Aladár jeles dolgozatot írt.	akkor $\longrightarrow$	Aladár jelest kap félévkor.	Ha aladár jeles dolgozatot írt, akkor Aladár jelest kap félévkor.
	igaz		igaz	...
	igaz		hamis	...
	hamis		igaz	...
	hamis		hamis	...

Megoldás. Ha Aladár jeles dolgozatot írt és jelest kap félévkor, akkor nyilvánvalóan igaz a kijelentés.

Ha jeles dolgozat ellenére nem kap jelest félévkor, akkor a gyakorlatvezető nem mondott igazat, azaz hamis a kijelentés.

Ha Aladár nem írt jeles dolgozatot, akkor kaphat jelest (mert például egész évben jól dolgozott), és kaphat más jegyet is (mert egész évben nem teljesített a jelesnek megfelelően). Ha Aladár nem teljesítette a feltételt, nem írt jelest, akkor akár jelest kap, akár nem, a gyakorlatvezető állta a szavát. Azaz mind a két esetben igaz a kijelentés. Tehát a logikai értékek rendre: i, h, i, i.

28. Feladat. A következő állítások közül melyik fejezi ki ugyanazt a gondolatot, mint amint az előző állítás? (Ha Aladár jeles dolgozatot írt akkor Aladár jelest kap félévkor.)

a) Ha Aladár jelest kap félévkor, akkor jeles dolgozatot írt.

b) Ha Aladár nem kap jelest félévkor, akkor nem írt jeles dolgozatot.

c) Nem igaz az, hogy Aladár jeles dolgozatot írt és nem kap jelest félévkor.

d) Aladár csak akkor kap jelest félévkor, ha jeles dolgozatot írt.

Megoldás. *a)* Az első állítás szerint Aladár úgy is kaphat jelest, ha nem írt jeles dolgozatot, Az előtag: A: Aladár jeles dolgozatot írt . Az utótag B: Aladár jelest kap félévkor. Azaz az *a)* állítás nem ugyan azt fejezi ki, mint az eredeti állítás.

b) Az eredeti állítás szerint Aladár csak egy esetben nem kaphat jelest akkor, ha nem ír jeles dolgozatot. A *b)* állítás ugyan azt fejezi ki, mint az eredeti.

c) Ha Aladár jeles dolgozatot írt jelest kap félévkor. Ha nem kap jeles akkor nem írt jeles dolgozatot. Ebből az következik, hogy nem igaz az, hogy Aladár jeles dolgozatot írt és nem kap jelest félévkor. A *c)* állítás is ugyan azt fejezi ki, mint az eredeti.

d) A *d)* állítás nem ugyanazt fejezi ki, mint az eredeti, mert Aladár akkor is kaphat jelest az eredeti állítás szerint, ha nem írt jelest.

29. Feladat. Mit fejez ki a következő kijelentés: Ha esik az eső, (akkor) felveszem a sárga gumicsizmám.

Megoldás. Ha esik az eső, felveszem a gumicsizmám.

Ha nem esik az eső, akkor is felvehetem, de azt is megtehetem, hogy nem veszem fel. Ugyanis arról nem szól az állítás, hogy mi történik, ha nem esik az eső. Tehát egyetlen esetben hamis az állítás akkor, ha esik az eső, és nem veszem fel a sárga gumicsizmám.

30. Feladat. Mit fejez ki a következő kijelentés (amit nem a dalai láma mondott):

Ha Arisztid érti a logikát, akkor én vagyok a dalai láma.

Megoldás. Ha Arisztid érti a logikát, és én vagyok a dalai láma: akkor igaz az állítás.

Ha Arisztid érti a logikát, és nem én vagyok a dalai láma: akkor hamis az állítás.

Ha Arisztid nem érti a logikát, és én vagyok a dalai láma: akkor igaz az állítás.

Ha Arisztid nem érti a logikát, és nem én vagyok a dalai láma: akkor igaz az állítás.

Mivel az illető, aki a kijelentést tette nem a dalai láma, így az állítás csak abban az esetben igaz, ha Arisztid nem érti a logikát.

31. Feladat. Állapítsuk meg a következő (halandzsa nyelven írt) összetett ítéletek logikai értékét, ha a komponensek logikai értéke ismert:

A: A vagera plézik. (i); *B*: A kutor matat. (i); *C*: A mulen getam. (h); *D*: A togo kutos. (h).

a) Ha *A*, akkor *B*.

b) Ha *D*, akkor *B*.

c) Ha nem *B*, akkor nem *A*.

d) Ha nem *C*, akkor nem *A*.

e) Ha nem *A*, akkor nem *B*.

f) Ha nem *B*, akkor nem *D*.

g) Ha *A*, akkor *C*.

h) Ha *C*, akkor *D*.

Megoldás.

a)	Ha	*A*,	akkor	*B*.	
	Ha	„A vagera plézik”,	akkor	„A kutor matat”.	
		i		i	igaz

b)	Ha	*D*,	akkor	*B*.	
	Ha	„A togo kutos.”,	akkor	„A kutor matat.”	
		h		i	igaz

c)	Ha	nem *B*,	akkor	nem *A*	
	Ha	„A kutor nem matat.”,	akkor	„A vagera nem plézik.”	
		h		h	igaz

d)	Ha	nem *C*,	akkor	nem *A*	
	Ha	„A mulem nem getam.”,	akkor	„A vagera nem plézik.”	
		i		h	hamis

e)	Ha	nem A,	akkor	nem B	
	Ha	„A vagera nem plézik.”,	akkor	„A kutor nem matat.”	
		h		h	igaz

f)	Ha	nem B,	akkor	nem D	
	Ha	„A kutor nem matat.”,	akkor	„A togo nem kutos.”	
		h		i	igaz

g)	Ha	A,	akkor	C	
	Ha	„A vagera plézik.”,	akkor	„A mulen getam.”	
		i		h	hamis

h)	Ha	C,	akkor	D	
	Ha	„A mulen getam.”,	akkor	„A togo kutos.”	
		h		h	igaz

Definíció. A P és a Q ítéletből a „ha ..., akkor ...” kötőszavakkal képzett „Ha P, akkor Q” összetett ítéletet implikációnak nevezzük. A P ítéletet az implikáció előtagja, a Q az utótagja.

Jelölés: $P \to Q$ vagy $P \Rightarrow Q$. (Olvasd: „P implikálja a Q-t.” vagy „P-ből következik Q.”)

Definíció. Implikációnak nevezzük azt a logikai műveletet, amely során két ítéletből olyan összetett ítéletet alkotunk, amely pontosan akkor hamis, ha az előtag (feltétel) igaz, de az utótag (következmény) hamis.

Az implikáció Carol diagramja

P	Q	$P \to Q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Az implikációt elvégezhetjük az ítéletek tartalmától függetlenül, csupán az eredeti logikai értékek ismeretében: $\mathrm{i} \to \mathrm{i} = \mathrm{i}$; $\mathrm{i} \to \mathrm{h} = \mathrm{h}$; $\mathrm{h} \to \mathrm{i} = \mathrm{i}$; $\mathrm{h} \to \mathrm{h} = \mathrm{i}$.

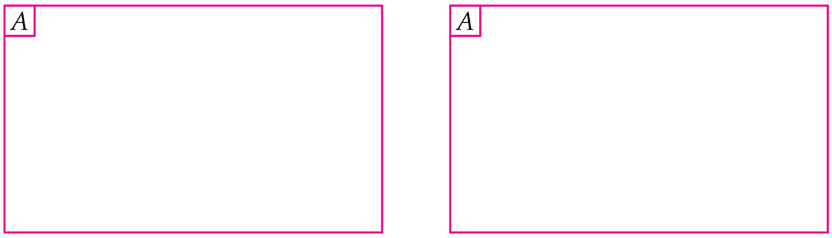
A matematikai szaknyelvben sokszor használjuk a „szükséges feltétel”, illetve az „elégséges feltétel” kifejezéseket.

Ha $\boxed{\text{egy } n \text{ szám osztható 10-zel,}}$ $\xrightarrow{\text{akkor}}$ $\boxed{\text{az } n \text{ szám osztható 2-vel.}}$

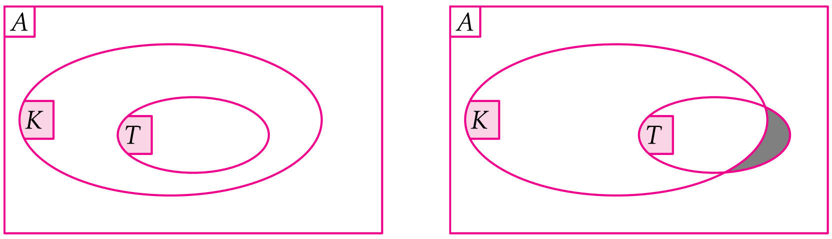
Ez elégséges feltétele annak, hogy egy szám 2-vel osztható legyen (de nem szükséges feltétele, mert nemcsak a 10-zel osztható számok oszthatók 2-vel.)

Ez szükséges feltétele annak, hogy egy szám 10-zel osztható legyen (de nem elégséges feltétele, mert van olyan 2-vel osztható szám, amely nem osztható 10-zel).

32. Feladat. Az alaphalmaz a természetes számok halmaza. Legyen $T = \{$10-zel osztható számok$\}$ és $K = \{$2-vel osztható számok$\}$. Ábázoljuk Venn-diagrammal a két halmazt!



Megoldás.



33. Feladat. Két-két elemi ítélet felhasználásával kétféleképpen (például $A \to B$, illetve $B \to A$) fogalmazzon meg implikációt! Döntse el az implikációk logikai értékét.

I.	A: Az adott négyszög paralelogramma.	B: Az adott négyszög trapéz.
II.	C: Az adott szám 10-zel osztható.	D: Az adott szám 0-ra végződik.
III.	E: Az adott szám pozitív.	F: Az adott szám egész szám.

A kettő közül melyik szükséges, illetve melyik elégséges feltétele a másiknak?

Megoldás.

Ha A: „Az adott négyszög paralelogramma.”, akkor B: „Az adott négyszög trapéz.”. Igaz állítás, mert a trapézok halmazának valódi részhalmaza a paralelogrammák halmaza.

A szükséges feltétel: B: „Az adott négyszög trapéz.”

Elégséges feltétel: A: „Az adott négyszög paralelogramma.”

Ha B: „Az adott négyszög trapéz.”, akkor A: „Az adott négyszög paralelogramma.”. Hamis állítás, mert van olyan trapéz, amelyik nem paralelogramma.

A C halmaz részhalmaza a D halmaz és a D halmaz részhalmaza a C halmaz, azaz a C megegyezik a D-vel.

Ha C: „Az adott szám 10-zel osztható.”, akkor D: „Az adott szám 0-ra végződik.”. Igaz állítás.

Ha D: „Az adott szám 0-ra végződik.”, akkor C: „Az adott szám 10-zel osztható.”. Igaz állítás.

Ha E: „Az adott szám pozitív.”, akkor F: „Az adott szám egész szám.”. Hamis állítás, mert van olyan pozitív szám, amelyik nem egész szám. például 0,2

Ha F: „Az adott szám egész szám.”, akkor E: „Az adott szám pozitív.”. Hamis állítás, mert van olyan egész szám, amelyik nem pozitív szám. Például -2.

Megfigyelhettük, hogy ha az implikáció két komponensét felcseréljük, akkor nem mindig ugyanazt az összetett ítéletet kapjuk (vagyis a két állítást egymástól függetlenül kell bizonyítanunk vagy cáfolnunk). Az implikáció nem felcserélhető, azaz nem kommutatív.

I.

Ha $\boxed{\text{egy } n \text{ szám osztható 10-zel,}} \xrightarrow{\text{akkor}} \boxed{\text{az } n \text{ szám osztható 2-vel.}}$ (Ez a kijelentés igaz.)

II.

Ha $\boxed{\text{egy } n \text{ szám osztható 2-vel,}} \xrightarrow{\text{akkor}} \boxed{\text{az } n \text{ szám osztható 10-zel.}}$ (Ez a kijelentés hamis.)

Az I., illetve a II. kijelentést a matematikában egymás megfordításának nevezzük. Mivel az I. igaz, a II. hamis, azt mondjuk, hogy az I. állítás nem fordítható meg.

I. Pitagorasz-tétel ($A \to B$)

Ha $\boxed{\text{egy háromszög derékszögű,}} \xrightarrow{\text{akkor}} \boxed{\text{a háromszög befogóinak négyzetösszege megegyezik az átfogó négyzetével.}}$ (Ez a kijelentés igaz.)

II. A Pitagorasz-tétel megfordítása ($B \to A$)

Ha $\boxed{\text{a háromszög befogóinak négyzetösszege megegyezik az átfogó négyzetével.}} \xrightarrow{\text{akkor}} \boxed{\text{a háromszög derékszögű,}}$ (Ez a kijelentés igaz.)

Mivel az I. és a II. állítás egyaránt igaz, azt mondhatjuk, hogy az I.-nek a II. szükséges és elégséges feltétele, más szóval, hogy az I. tétel megfordítható. Ebben az esetben a két tételt egy tételként is megfogalmazhatjuk:

Definíció. A matematikában sokszor vizsgáljuk, hogy egy tétel megfordítható-e. Ha igen, akkor a két ítéletet a következő szavakkal kapcsolhatjuk össze:

„…pontosan akkor, ha …, „…akkor és csak akkor …, ha …"

„… szükséges és elégséges feltétele …-nek".

Definíció. Ekvivalenciának nevezzük azt a logikai műveletet, amely során két ítéletből olyan összetett ítéletet alkotunk, amely pontosan akkor igaz, ha a két komponens logikai értéke megegyezik.

Jelölése: $A \leftrightarrow B$ vagy $A \Leftrightarrow B$ vagy $A \equiv B$. (Olvasd: A ekvivalens B-vel.)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Az ekvivalencia azt jelenti, hogy a két ítéletet (nyitott mondatot) egyenértékűnek tekintjük.

34. Feladat. Igazolja a következő azonosságot: $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$!

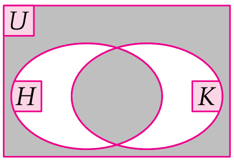
a) Szemléltesse Venn-diagrammal is ezt az azonosságot! Feltéve, hogy az A állítás az, hogy „x eleme a H halmaznak", a B állítás pedig, hogy „x eleme a K halmaznak".

b) Töltse ki a táblázatot!

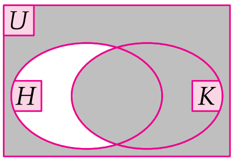
A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
i	i				
i	h				
h	i				
h	h				

Megoldás.

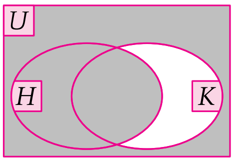
a) A: x eleme H-nak; B: x eleme K-nak. $A \leftrightarrow B$: x akkor és csak akkor eleme H-nak, ha eleme K-nak. Vagyis vagy mindkét halmaznak elemei, vagy egyiknek sem. Ez a $(K \cap L) \cup \overline{(K \cup L)}$ halmaz.



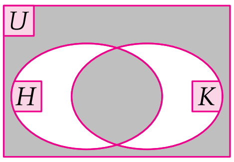
$A \to B$: azok az elemek vannak az igazsághalmazban, amelyek ha benne vannak H-ban, akkor benne vannak K-ban is. Ez a $K \cup \overline{H}$ halmaz.



$B \to A$: azok az elemek teljesítik, amelyek ha benne vannak K-ben, akkor benne vannak H-ban is. Ez pedig a $\overline{K} \cup H$ halmaz.



Az $(A \to B)$ és a $(B \to A)$ konjunkciójának azok az elemek felelnek meg, amelyek mindkét iménti halmazban benne vannak.



Látjuk, hogy ugyanazt a halmazt kaptuk mindkét esetben.

b)

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \land (B \to A)$
i	i	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	h	i	h	h
h	h	i	i	i	i

35. Feladat. A két-két elemi ítélet közül melyek szükségesek és elégséges feltételei egymásnak? Fogalmazza meg az ekvivalenciát!

A: Az adott szám osztható 9-cel.	B: A szám számjegyeinek összege 9.
C: Az adott négyszög rombusz.	D: Az adott négyszög deltoid és trapéz.
E: Az adott szám osztható 25-tel.	F: Az adott szám 25-re vagy 75-re végződik.
G: Az adott háromszög derékszögű.	H: Az adott háromszögnek két hegyesszöge van.

(A számok felírását a 10-es számrendszerben értjük.)

Megoldás. $A \leftrightarrow B$: Az adott szám osztható 9-cel akkor és csak akkor, ha a szám számjegyeinek összege 9.

$A \rightarrow B$: Ha az adott szám osztható 9-cel akkor, a szám számjegyeinek összege 9.

Hamis állítás, mert például a 999 osztható 9-cel, de a számjegyeinek összege nem 9.

$B \rightarrow A$: Ha a szám számjegyeinek összege osztható kilenccel, akkor az adott szám is osztható 9-cel,

$A \rightarrow B$ hamis, $B \rightarrow A$ igaz, tehát $A \leftrightarrow B$ hamis.

$C \leftrightarrow D$: Az adott négyszög akkor és csak akkor rombusz, ha adott négyszög deltoid és trapéz.

$C \rightarrow D$: Ha az adott négyszög rombusz, akkor az adott négyszög deltoid és trapéz.

Igaz állítás, mert a rombusznak van párhuzamos oldala, azaz trapéz, valamint egyik átlója szimmetria tengelye, azaz deltoid is.

$D \rightarrow C$: Ha az adott négyszög deltoid és trapéz, akkor a négyszög rombusz.

Igaz állítás, mert a négyszögnek van párhuzamos oldalpárja és az egyik átlója szimmetria tengelye, akkor az rombusz.

$C \rightarrow D$ igaz, $D \rightarrow C$ igaz, tehát $C \leftrightarrow D$ igaz.

$E \leftrightarrow F$: Az adott szám akkor és csak akkor osztható 25-tel, ha az adott szám 25-re vagy 75-re végződik.

$E \rightarrow F$: Ha az adott szám osztható 25-tel, akkor az adott szám 25-re vagy 75-re végződik.

Hamis állítás, mert 50-re és 00-ra is végződhet a szám.

$F \rightarrow E$: Ha az adott szám 25-re vagy 75-re végződik, akkor az adott szám osztható 25-tel. Igaz állítás.

$E \rightarrow F$ hamis, $F \rightarrow E$ igaz, tehát $E \leftrightarrow F$ hamis.

$G \leftrightarrow H$: Az adott háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha az adott háromszögnek két hegyesszöge van.

$G \rightarrow H$: Ha az adott háromszög derékszögű, akkor az adott háromszögnek két hegyesszöge van. Igaz állítás, mert a másik két szög összege 90 fok, azaz mind a kettő hegyes szög.

$H \rightarrow G$: Ha az adott háromszögnek két hegyesszöge van, akkor az adott háromszög derékszögű. Hamis állítás, mert a harmadik szög is lehet hegyes szög.

$G \rightarrow H$: igaz, $H \rightarrow G$ hamis, tehát $C \leftrightarrow D$ hamis.

9. Általános iskolai alapfeladatok a fogalom alakítására (Köves Gabriella)

9.1. Műveletek halmazokkal

9.1. Feladat. Az alaphalmaz: $H = \{$20-nál nem nagyobb természetes számok$\}$.

Az alaphalmaz elemei közül válasszuk ki azokat, amelyek

a) 3-mal oszthatók;

b) 3-mal nem oszthatók;

c) 3-mal és 5-tel oszthatók;

d) 3-mal vagy 5-tel oszthatók;

e) 3-mal oszthatók, de 5-tel nem oszthatók;

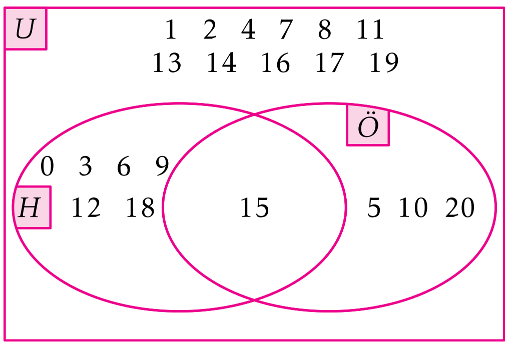
f) 3 és 5 közül csak az egyikkel oszthatók;

g) sem 3-mal, sem 5-tel nem oszthatók;

h) osztható 3-mal és a számjegyeik összege 5.

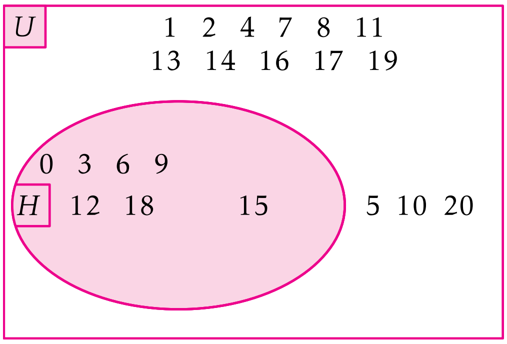
Megoldás. A feladat feladható, ha a számkör kiterjed 20-ig és ismerik a tanulók az 5-ös és 3-as szorzótáblát. Vagy ha ismerik a kivonást, és tudják értelmezni az osztást, mint ismételt kivonást.

A Venn-diagramokat a teljes halmazábrákból a megfelelő részek színezésével jelöljük. A feladathoz tartozó halmazábra:



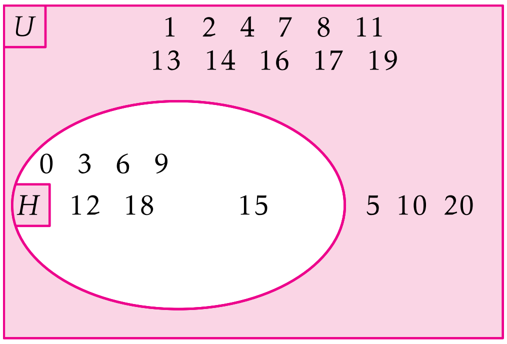
a) 3-mal oszthatók. $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Ügyeljünk arra, hogy a 0-t ne felejtsék ki a tanulók a felsorolásból. $(0 \cdot 3 = 0)$

Venn-diagrammal ábrázolva:



b) 3-mal nem oszthatók. Az A halmaz komplementere a megoldáshalmaz. $H = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\}$.

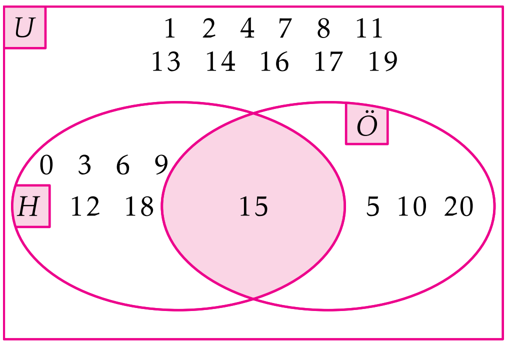
Venn-diagrammal ábrázolva:



c) 3-mal és 5-tel osztható számok.

Ebben a feladatban a logikai és (konjunkció) és a metszet (diszjunkció) fogalmát erősítjük. Legyen H a 3-mal és $Ö$ az 5-tel osztható számok halmaza. Kezdetben mind a két halmaz elemeit határozzuk meg, majd jelöljük (aláhúzással, vagy bekarikázással) a közös elemeket. Keressük az (x osztható 3-mal) $\wedge$ (x osztható 5-tel) állítás igazsághalmazát, amely megegyezik a $H \cap Ö = \{0, 15\}$ halmazzal. Ezeket a jelöléseket csak a későbbi évfolyamokon használjuk.

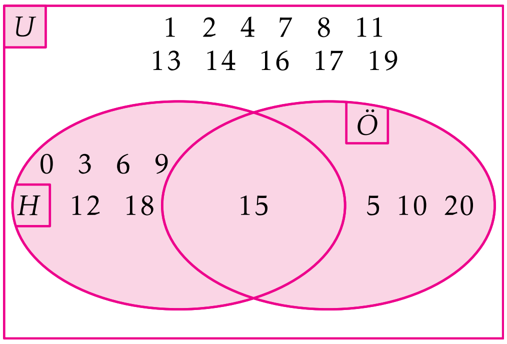
Venn-diagrammal ábrázolva:



d) 3-mal vagy 5-tel osztható számok.

Ebben a feladatban a logikai vagy és a diszjunkció fogalmát erősítjük. Legyen H a 3-mal és $Ö$ az 5-tel osztható számok halmaza. Itt azokat az elemeket kell meghatározni, amelyek vagy az egyik, vagy a másik, vagy mindkét halmazban szerepelnek, de mindegyik csak egyszer szerepelhet a felsorolásban. Azaz keressük a (x osztható 3-mal) $\vee$ (x osztható 5-tel) állítás igazsághalmazát, amely megegyezik a $H \cup Ö = \{0, 3, 5; 6, 9, 10, 12, 15, 18\}$ halmazzal.

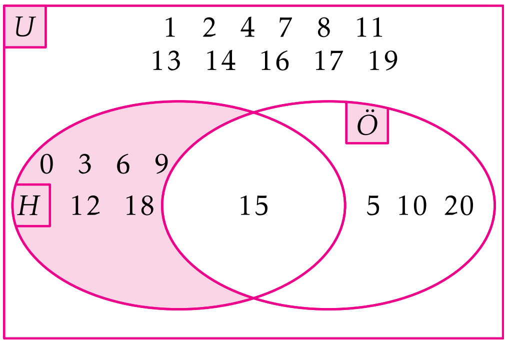
Venn-diagrammal ábrázolva:



e) 3-mal oszthatók, de 5-tel nem oszthatók.

A hárommal osztható számok közül ki kell venni az 5-tel osztható számokat. A H és az $Ö$ halmaz ilyen sorrendben vett különbséghalmazát keressük. Azaz a $H \setminus Ö$ elemeit kell felsorolni. $H \setminus Ö = \{3, 6, 9, 12, 18\}$

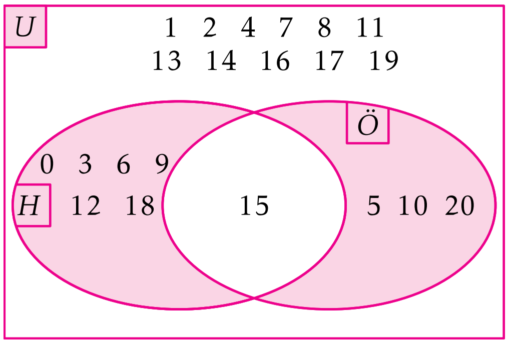
Venn-diagrammal ábrázolva:



f) 3 és 5 közül csak az egyikkel oszthatók.

A két halmaz szimmetrikus különbségét keressük, azaz a két halmaz elemeiből ki kell venni azokat, amelyek mind a kettőben szerepelnek. $F = \{3, 6, 9, 12, 18\}$. Az alsó tagozaton nem használjuk a szimmetrikus különbség kifejezést.

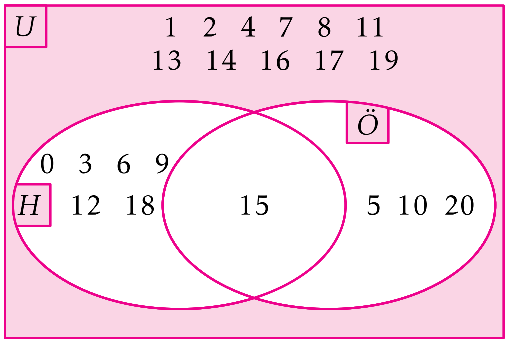
Venn-diagrammal ábrázolva:



g) Sem 3-mal, sem 5-tel nem oszthatók.

Az alaphalmazból kivesszük azokat, amelyek vagy 3-mal, vagy 5-tel oszthatók. Azaz a $H \cup Ö$ halmaz komplementerét keressük. Az alsó tagozaton nem használjuk a „komplementer" kifejezést. $G = \{0, 1, 2, 4, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 17, 19\}$.

Venn-diagrammal ábrázolva:



h) Osztható 3-mal és a számjegyeik összege 5.

A 3-mal osztható számok közül kell megkeresni azokat, amelyek számjegyeinek összege 5. Nincsen ilyen szám. Ez a feladat példa az üres halmaz fogalmának alakítására.

9.2. Feladat. A kétjegyű természetes számok között hány olyan van, amelyik az 5 és a 6 közül

a) mindkettővel osztható;

b) csak az 5-tel osztható;

c) csak a 6-tal osztható;

d) csak az egyikkel osztható;

e) valamelyikkel osztható;

f) egyikkel sem osztható.

A halmazok közötti kapcsolatokat írja le a halmazelméleti szimbólumok segítségével! Rajzolja meg a halmazábrákat is!

Megoldás. Ezt a feladatot célszerűen alkalmazhatjuk az 5-ös, 6-os szorzótábla elmélyítésekor, (esetleg szűkíthetjük az alaphalmazt). Vagy alkalmazhatjuk az oszthatósági szabályok elmélyítéseként. Ez esetben az alacsonyabb évfolyamokon először határozzuk meg, hogy mely számok oszthatók öttel, illetve hattal. Öttel azok a számok oszthatók, amelyekben az egyesek helyén 0, vagy 5 áll. Hattal azok a számok oszthatók, amelyek oszthatóak kettővel is és hárommal is. Hárommal azok a számok oszthatók, amelyek számjegyeinek összege osztható hárommal.

Célszerű felsorolni mind a két halmaz elemeit, és azután válaszolni a kérdésekre.

$Ö = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95\}$

$H = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$

A kétjegyű természetes számok között hány olyan van, amelyik 5 és 6 közül

a) mindkettővel osztható; 3

b) csak 5-tel osztható; 15

c) csak 6-tal osztható; 12

d) csak az egyikkel osztható; 27

e) valamelyikkel osztható; 30

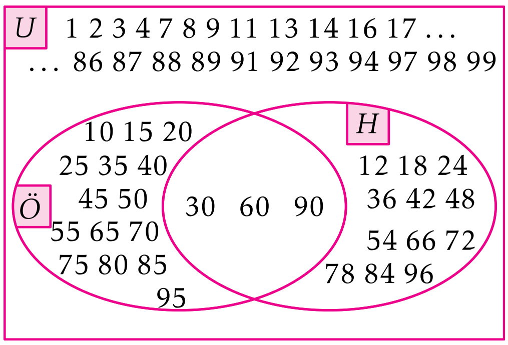
f) egyikkel sem osztható. 60

A feladatot megoldathatjuk úgy is, hogy az összes kétjegyű számból kiválogatjuk a megfelelőeket.

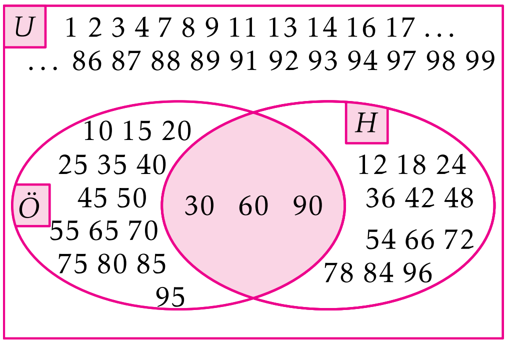
A magasabb évfolyamokon logikai úton is megoldható a feladat.

a) Mindkét számmal azok a számok oszthatók, amelyek oszthatók 30-cal, azaz $\{30, 60, 90\}$.

A halmazzal történő szemléltetéshez használhatjuk a feladathoz megrajzolható Venn-diagramot.



Itt a két halmaz metszetének elemszámát kell meghatározni. $(Ö \cap H)$



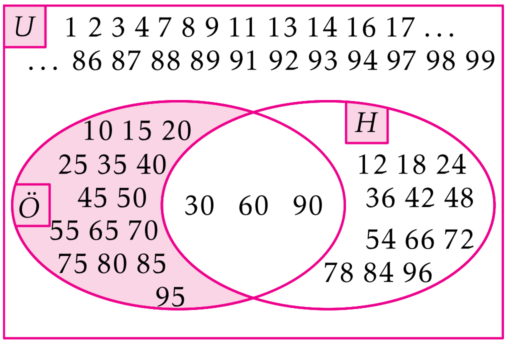
b) Csak 5-tel osztható. 18 öttel osztható szám van, mert az egyesek helyére kétfelé szám kerülhet, a tízesek helyére 9. Így összesen $2 \cdot 9 = 18$ szám lenne, de ebből le kell vonni azokat, amelyek 6-tal is oszthatók, $18 - 3 = 15$ szám felel meg a feltételnek.

A két halmaz különbséget kell megadni ($Ö \setminus H$).

$Ö = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95\}$

$(Ö \setminus H) = \{10, 15, 20, 25, 35, 40, 45, 50, 55, 65, 70, 75, 80, 85, 95\}$

Halmazábra:

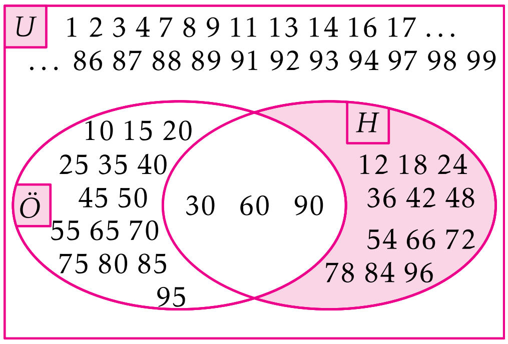


c) Csak 6-tal osztható. Az összes 6-tal osztható számok számából le kell vonni azokat, amelyek 5-tel is oszthatók. Ebben az esetben is a két halmaz különbségét kell megadni, de más sorrendben ($H \setminus Ö$).

$H = \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$

$H \setminus Ö = \{12, 18, 24, 36, 42, 48, 54, 66, 72, 78, 84, 96\}$

Halmazábra:



d) Csak az egyik számmal osztható. Ebben az esetben a szimmetrikus különbséget kell meghatározni. Az 5-tel vagy 6-tal osztható számok halmazából ki kell venni azokat a számokat, amelyek 5-tel és 6-tal is oszthatók.

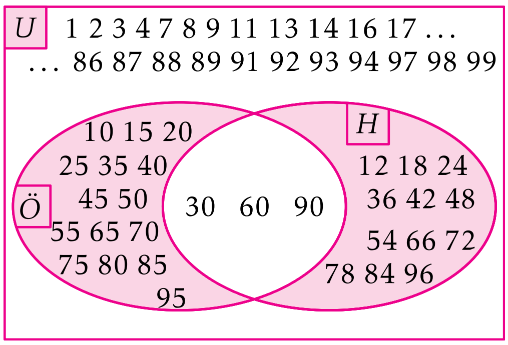
$\ddot{O}\triangle H = \{10, 12, 15, 18, 20, 24, 35, 36, 42, 45, 48, 50, 54, 55, 65, 66, 70, 72, 75, 78, 80, 84, 85, 95, 96\}$

$(\ddot{O} \cup H) \setminus (\ddot{O} \cap H)$

Egy másik megoldás, hogy a csak 5-tel és a csak 6-tal osztható számok unióját vesszük.

$(\ddot{O} \setminus H) \cup (H \setminus \ddot{O})$

Halmazábra:

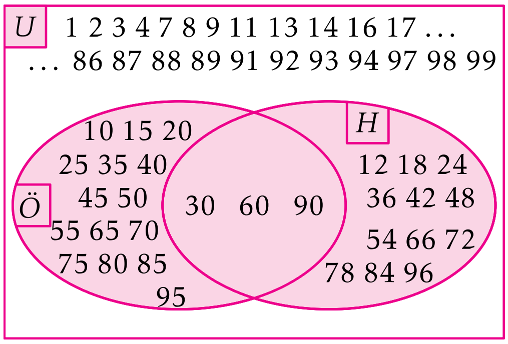


e) Valamelyikkel osztható. A csak 5-tel és a csak 6-tal osztható számok összegéhez hozzá kell adni a mindkettővel oszthatók számát.

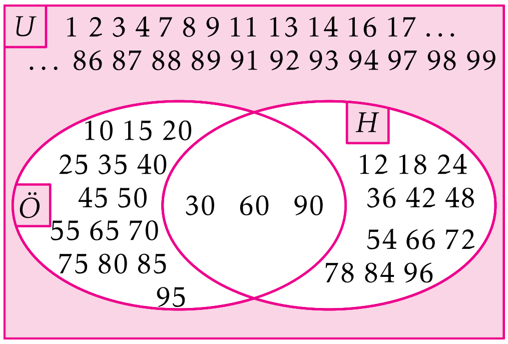
Egy másik megoldás, hogy az összes 5-tel és 6-tal osztható számok összegéből le kell vonni a mindkettővel oszthatók számát, mert ezeket kétszer számoltuk.

$(\ddot{O} \cup H) = \{10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 35, 36, 42, 45, 48, 50, 54, 55, 60, 65, 66, 70, 72, 75, 78, 80, 84, 85, 90, 95, 96\}$

Halmazábra:



f) Egyikkel sem osztható. Az összes kétjegyű szám számából le kell vonni a valamelyikkel oszthatószámok számát. Az Ö és H unió komplementerének elemszámát kell meghatározni ($\overline{Ö \cup H}$).



9.3. Feladat. Sorolja fel az utasításokkal adott halmazok elemeit.

a) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid 10 < x < 20\}$;

b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ osztható 9-cel és } 100 < x < 150\}$;

c) $C = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ négyzetszám és } x \leq 100\}$;

d) $D = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ 3-ra végződik és } x \text{ négyzetszám}\}$.

Megoldás. *a)* $A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$;

b) $B = \{109, 118, 127, 136, 145\}$;

c) $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$;

d) $D = \emptyset$, nincs ilyen szám.

9.4. Feladat. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $B = \{8, 9, 10, 11, 12\}$.

Írja föl a következő halmazok elemeit!

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$;

c) $A \setminus B$;

d) $B \setminus A$;

e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

f) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Megoldás. *a)* $A \cup B = \{3, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 18\}$. Minden számot csak egyszer kell felsorolni.

b) $A \cap B = \{9, 12\}$.

c) $A \setminus B = \{3, 6, 15, 18\}$

d) $B \setminus A = \{8, 10, 11\}$.

e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{3, 6, 8, 10, 11, 15, 18\}$

f) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Ugyanaz az igazsághalmaz, mint az *e)* esetben.

9.5. Feladat. Az A és a B halmazokról a következőt tudjuk:

$A \cap B = \{12, 18\}$

$A \cup B = \{10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$

$B \setminus A = \{15\}$

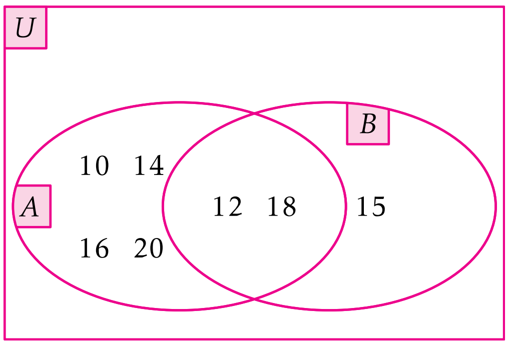
Sorold föl az A, a B és az $A \setminus B$ halmaz elemeit!

Megoldás. A fogalomalakítás elején célszerű Venn-diagrammal szemléltetni a meghatározásokat.

$A = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

$B = \{12, 15, 18\}$

$A \setminus B = \{10, 14, 16, 20\}$

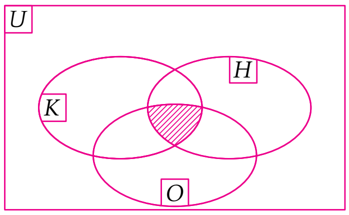


9.6. Feladat. Az alaphalmaz a pozitív egész számok halmaza.

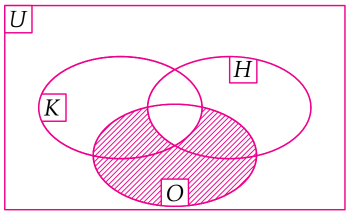
K = {2-vel osztható számok}, H = {3-mal osztható számok}, O = {5-tel osztható számok}.

Írja le szavakkal és halmazműveleti jelekkel is az ábrákon bevonalkázott halmazokat!

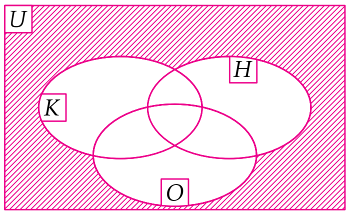
a)



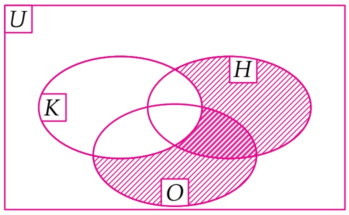
b)



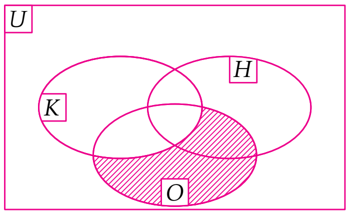
c)



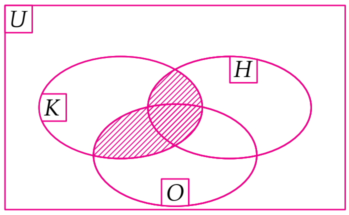
d)



e)



f)



Megoldás. *a)* $K \cap H \cap O$. A $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$-cal osztható számok.

b) $O \setminus (K \cap H \cap O)$ vagy $O \setminus (K \cap H)$. Azok az 5-tel osztható számok, amelyek nem oszthatók 6-tal.

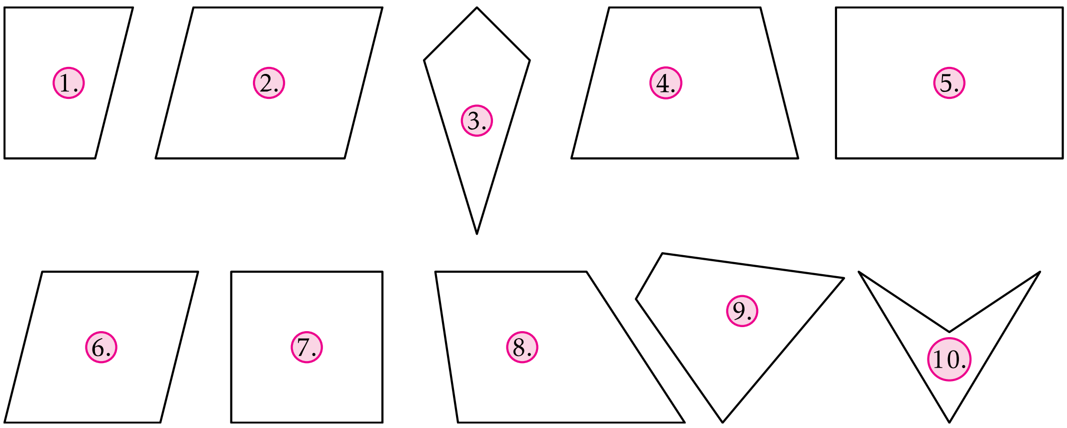
c) $U \setminus (K \cup H \cup O)$. Azok a számok, amelyek sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem oszthatók.

d) $(H \cup O) \setminus K$. Azok a számok, amelyek oszthatók 3-mal és 5-tel, de nem oszthatók 2-vel. Azaz a 3-mal és 5-tel osztható páratlan számok. (Vagyis a 15-tel osztható páratlan számok.)

e) $O \setminus K$. Az 5-tel osztható páratlan számok.

f) $(O \cap K) \cup (K \cap H)$. Az 5-tel osztható páros számok és a 3-mal osztható páros számok, vagyis a 10-zel és 6-tal osztható számok. Ez végső soron a 30-cal osztható számokat jelenti.

9.7. Feladat. Az alaphalmaz elemei a következő négyszögek:



A sorszámukkal is add meg a következő halmazok elemeit:

a) $A = \{\text{trapézok}\}$; $B = \{\text{deltoidok}\}$;
$\overline{A}$; $\overline{B}$; $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$;

b) $H = \{\text{tengelyesen szimmetrikus}\}$; $K = \{\text{középpontosan szimmetrikus}\}$;
$H \cap K$; $H \cup K$; $H \setminus K$; $K \setminus H$; $\overline{H \cup K}$; $\overline{H} \cap \overline{K}$

Megoldás. *a)* $\overline{A}$: azok a négyszögek, amelyeknek nincs párhuzamos oldalpárjuk: 3., 9., 10.

$\overline{B}$: Azok a négyszögek, amelyekben az egyik átló nem szimmetria tengely: $\{1., 2., 4., 5., 8., 9.\}$

$A \cap B = \{6., 7.\}$

$A \cup B = \{1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 10.\}$

$A \setminus B = \{1., 2., 4., 5., 8., 10.\}$

$B \setminus A = \{3., 10.\}$

b) $H \cap K = \{5., 6., 7.\}$

$H \cup K = \{2., 3., 4., 5., 6., 7., 10.\}$

$H \setminus K = \{3., 4., 10.\}$

$K \setminus H = \{2\}$

$\overline{H \cup K} = \{1., 8., 9.\}$

$\overline{H} \cap \overline{K} = \{1., 8., 9.\}$

9.8. Feladat. A C és a D pont távolsága 5 cm.

Ábrázold azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek

a) legalább az egyik ponttól legfeljebb 3 cm távolságra vannak;

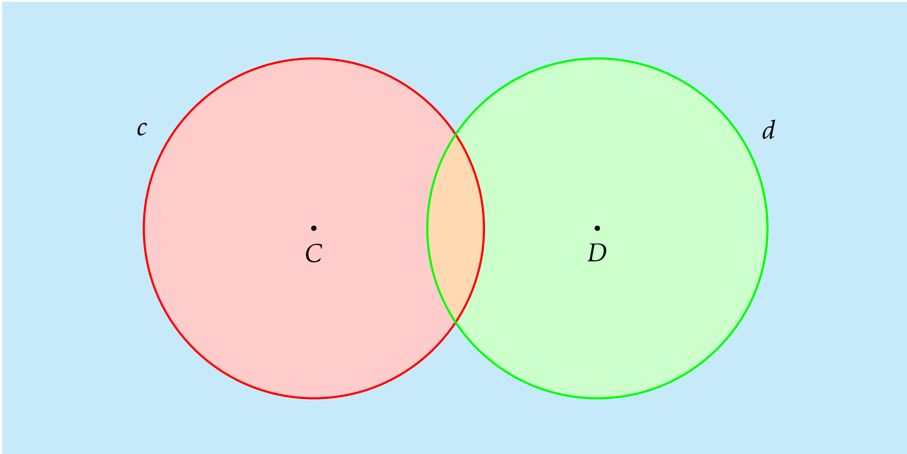
b) mindkét ponttól legfeljebb 3 cm távolságra vannak;

c) mindkét ponttól legalább 3 cm távolságra vannak;

d) a C ponttól legfeljebb 3 cm és a D ponttól legalább 3 cm távolságra vannak;

e) az egyik ponttól legalább 3 cm távolságra vannak, a másik ponttól legfeljebb 3 cm távolságra vannak.

Megoldás. Ahhoz, hogy egyszerűbben tudjunk válaszolni a kérdésekre, kiszíneztük a sík pontjait. A C ponttól pontosan 3 cm-re lévő pontokat pirosra; a D-től pontosan 3 cm-re lévő pontokat zöldre; a D-től legfeljebb 3 cm-re lévő pontokat halvány zöldre; a C-től legfeljebb 3 cm-re lévő pontokat halvány pirosra; a C-től és D-től *is* legfeljebb 3 cm-re lévő pontokat narancssárgára; az ezeken kívül eső pontokat világos kékre.



a) A halvány pirossal és kékkel színezett pontok, beleértve a körök vonalait azon a részen, de nem beleértve a körök metszéspontjait.

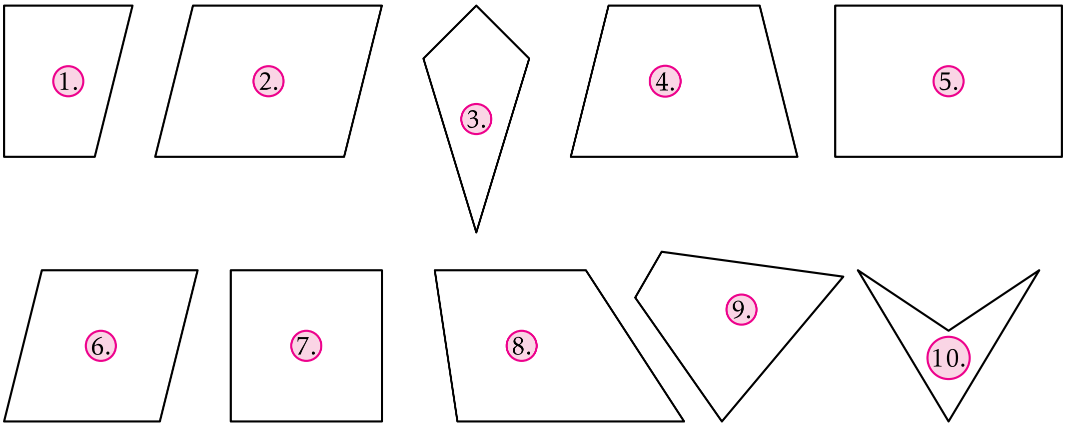
b) A narancssárga színű pontok, beleértve a határoló pontokat is.

c) A kék pontok, beleértve a körök vonalát is.

d) A halvány pirosra színezett pontok, a piros határoló pontokat nem, de a zöld határolópontokat (de a metszéspontokat sem) beleértve.

e) A halvány piros és a halvány zöld színűre színezett pontok, beleértve a határoló vonalait is.

9.9. Feladat.



Írd be a halmazábra megfelelő helyére a négyszögek sorszámát!

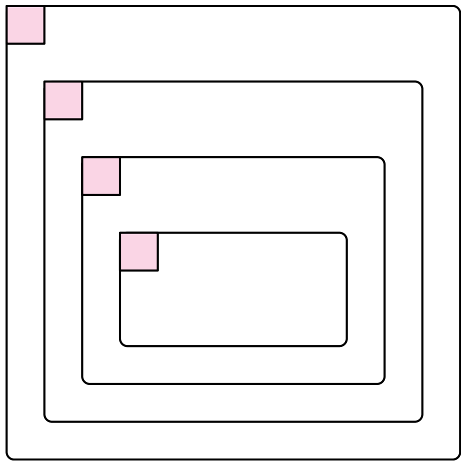
a) Írd az ábrába a következő címkéket:

A: Négyszög,

B: 4 tükörtengelye van,

C: 1-nél több tükörtengelye van,

D: tengelyesen szimmetrikus.



b) Írd az ábrába a következő címkéket:

A: Négyszög,

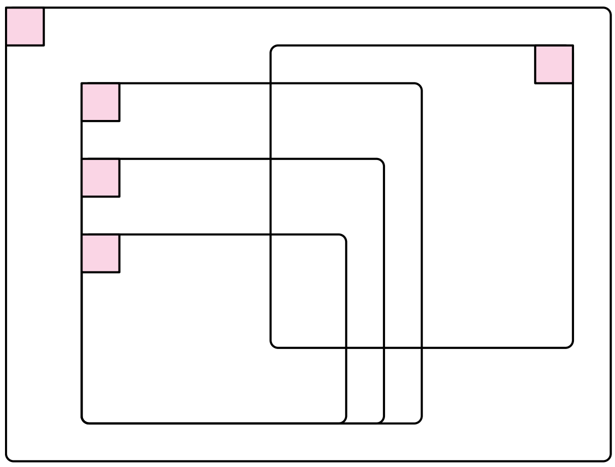
B: Trapéz,

C: Deltoid,

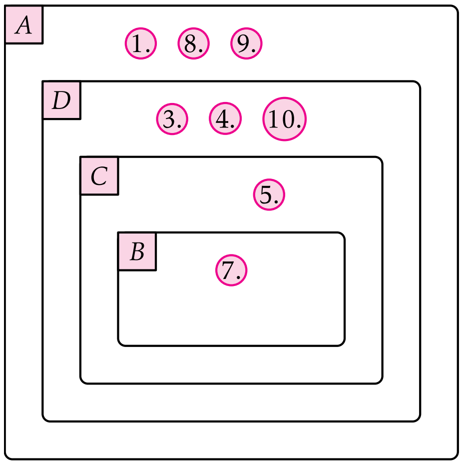
D: Paralelogramma,

E: Téglalap.

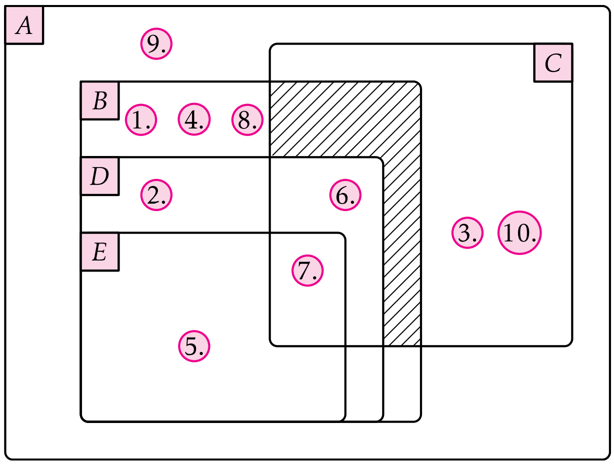
Vonalkázd be az üres halmazt!



Megoldás. *a)*



b)



9.10. Feladat. *a)* Mi a trapézok és a téglalapok halmazának egyesítése?

b) Mi a trapézok halmazának és a paralelogrammák halmazának a különbséghalmaza?

c) Mi a trapézok halmazának és a téglalapok halmazának a különbséghalmaza?

d) Mi a téglalapok halmazának és a trapézok halmazának a különbséghalmaza?

e) Mi a trapézok halmazának és a téglalapok halmazának közös része?

f) Mi a trapézok halmazának és a téglalapok halmazának uniója (egyesítése)?

Megoldás.

a) {trapézok} ∩ {téglalapok} = {trapézok}, mert a trapézok halmazának részhalmaza a téglalapok halmaza.

b) {trapézok} \ {paralelogrammák}: a trapézoknak részhalmaza a paralelogrammák halmaza. Ha kivesszük a paralelogrammákat a trapézok halmazából, akkor azok a trapézok maradnak, amelyeknek nincs két pár párhuzamos oldaluk. Azaz az általános trapézok, a derékszögű trapézok és a húrtrapézok.

c) {trapézok} \ {téglalapok} = {az összes olyan négyszög, amelyeknek nem egyenlőek a szögei}. Azaz a téglalapokat kell kivenni, annak részhalmazával, a négyzetekkel együtt.

d) Üres halmaz.

e) A téglalapok halmaza.

f) A trapézok.

9.11. Feladat. A következő állítások közül melyik igaz?

a) A: Van olyan deltoid, amelynek négy tükörtengelye van.

b) B: Ha egy négyszögnek két-két oldala egyenlő, akkor az deltoid.

c) C: A tengelyesen tükrös négyszögek középpontosan is tükrösek.

d) D: Minden tengelyesen tükrös négyszög köré kör szerkeszthető.

e) E: Minden olyan négyszög, amely köré kör szerkeszthető, az tengelyesen tükrös.

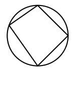
f) F: Van olyan derékszögű trapéz, amelyik rombusz.

Megoldás. *a)* Igaz. A négyzetnek négy tükörtengelye van, és deltoid, mert az átlói szimmetriatengelyek.

b) Hamis. Az általános paralelogrammának két-két szemközti oldala egyenlő hosszú, de egyik átlója sem szimmetriatengely.

c) Hamis. Az a deltoid, amely nem rombusz és nem négyzet tengelyesen tükrös, de nem tükrös középpontosan.

d) Hamis. A deltoid köré általában nem szerkeszthető kör. Kivétel a négyzet.

e) Hamis. Egy ellenpélda: 

f) Igaz. Ez a négyzet.

9.12. Feladat. Egy iskolában háromféle nyári tábort szerveztek. Az elsőre 40, a másodikra 16, a harmadikra 20 tanuló ment el. Volt 4 gyerek, aki mindhárom táborban részt vett és volt 8, aki legalább két táborban vett részt.

a) Hány tanuló vett részt összesen a táborban?

b) Hány tanuló vett részt pontosan egy táborban?

c) Hány tanuló vett részt legalább egy táborban?

d) Hány tanuló vett részt legfeljebb két táborban?

Megoldás. *a)* Ha összeadjuk az egyes táborban részt vettek számát, akkor a mindhárom táborban résztvevőket háromszor számoltuk, de csak egyszer kellene, ezért a $40 + 16 + 20 = 76$-ból le kell vonni a $2 \cdot 4 = 8$-at.

8-an részt vettek két vagy három táborban, azaz pontosan két táborban 4-en voltak. Ezt is kétszer számoltuk, igy a 4-et is le kell vonni.

$$40 + 16 + 20 - 8 - 4 = 66$$

b) Az egyes táborban részt vettek összegéből le kell vonni a több táborban részt vettek számát. A három táborban részt vettek számát háromszor, a két táborban részt vettek számát kétszer számoltuk.

$$40 + 16 + 20 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 76 - 20 = 56$$

c) Legalább egy táborban az vett részt, aki 1 vagy 2 vagy 3 táborban részt vett, azaz az összes résztvevő. A feladat megegyezik a *a)* feladattal.

d) Legfeljebb két táborban azok vettek részt, akik 1 vagy 2 táborban részt vettek.

$$40 + 16 + 20 - 3 \cdot 4 = 64$$

10. Összefoglaló feladatok (Fülöp Zsolt)

10.1. Bevezetés

A logikus gondolkodás alapjainak és a logikai műveletekkel kapcsolatos alapképességek rendszerének vizsgálatában Jean Piaget munkásságát tekinthetjük kiindulópontnak. Piaget azt a koncepciót alakította ki, hogy a gondolkodás fejlődése során a műveletek a matematikai struktúráknak megfelelően szerveződnek, ezért a logikai műveleti rendszer alapjául a klasszikus matematikai logika alapműveleteit vette. Annak ellenére, hogy a köznapi gondolkodás és a köznyelvi logika törvényszerűségeivel foglalkozó kutatások a klasszikus matematikai logika eszköztárát ma már nem tartják teljes mértékben megfelelőnek a köznyelvi kijelentések és a nyelvi logika formáinak interpretálására [13], kiindulásként mégis a klasszikus logika műveleti rendszerét használhatjuk fel [16].

Piaget szerint, míg a gyermeki gondolkodást a konkrét, addig a felnőttekét a formális műveleti logika írja le. Az ember fejlődésében a konkrét műveleti szakaszból a formálisba való átmenet 11-12 éves kor körül következik be, azonban ezzel az átmenettel kapcsolatban csak nagyon kevés adat áll a rendelkezésre. A tanuló ebben az életkori szakaszban a tárgyak helyett a fogalmakkal végez verbális műveleteket, és a kijelentéseken, ítéleteken, állításokon és a közöttük lévő viszonyokon végez műveleteket. Piaget szerint ebben az életkori szakaszban megy át a tanuló gondolkodása a képi, szemléletes gondolkodásból az elvontabb fogalmi gondolkodásba. Mivel ez a gondolkodás törvényekre épül, és ítéletekben, állításokban folyik, ezért Piaget ezt a kort az " ítéletek logikájának kora " néven említi. Ebben az életkorban 16 féle kettős ítéletviszony épül be a tanuló gondolkodásába, ezért cselekvő, alkotó módon tudja használni a 16 féle logikai függvényt. Ennek kialakulását és egyensúlyba jutását tekinti Piaget a formális gondolkodás kezdetének. 14 éves korban a tanulók már képesek műveleteket végezni verbális kijelentéseken, sőt hipotéziseken is. Ebben a műveleti szakaszban a gondolkodás teljesen függetlenné válik a cselekvéstől és elérheti a teljes fogalmi általánosítást, ezt hazai kutatók közül Kelemen is megállapítja [9]. A tanulók ebben az életkorban elvont fogalmakkal is képesek műveleteket végezni és az összetettebb gondolkodási műveletekkel is jól boldogulnak, tehát a nyelvi - logikai műveletrendszert cselekvő, alkotó módon használják. Viszont a tanuló csak a megfelelő ismeretrendszer birtokában képes eljutni a fogalmi gondolkodás szintjére, amelyet kizárólag az iskolai tanítás során képes elsajátítani. Nem ismerjük az átmenet mélységét, és azt sem, hogy az átmenet bizonyos időszakában a különböző kijelentések értelmezésében milyen logikai műveletet használnak a tanulók. Legalább ilyen nehéz a felnőttek formális logikai gondolkodásának a feltérképezése is. Mivel a felnőttek a formális műveleti szakaszt csak többé-kevésbé tudják elsajátítani (vannak, akik soha nem jutnak el erre a szintre) nincs egy empirikus, kézzelfogható kritérium a felnőttek gondolkodásmódjának elemzésére. Valójában a formális logikai strukturák és a nyelv egymással párhuzamosan fejlődnek, de sok embernél még felnőtt korban sem válik a logikai rendszer teljessé. Piaget szerint a formális műveleti szintet a formális logika írja le, és ezen a szinten szerveződik egységbe a 16 kétváltozós logikai függvény. Viszont nagyon nehéz a formális műveleti szintre való átmenet elemzése, és annak a megállapítása, hogy egy bizonyos egyén milyen formális műveleti szinten van. Piaget szerint 14 éves korig már kialakul, egybeszerveződik a 16 kétváltozós műveleti rendszer. Ezt a megállapítást viszont nem általánosíthatjuk, mivel egyénenként az egyes műveletek ismertsége különböző színvonalon van, a tanulók gondolkodása nem mindig a formális logika szabályai szerint működik, valamint jelentős eltérések vannak nemcsak a különböző iskolák tanulói között, hanem egy adott iskolán belül is a nyelvi-logikai képességek vonatkozásában.

Köznyelvi beszédünkben és írásunkban az elemi kifejezéseket nyelvi-logikai műveletekkel kapcsoljuk össze, így jutunk el az olyan kijelentésekhez, amelyeket bonyolultabb logikai műveletekkel írhatunk le. Ez a folyamat többé-kevésbé mindenkiben kialakul, de jelentős eltéréssel: az elért szint függ az életkortól, a fejlettségtől, az iskolázottságtól, a műveltségtől. A mindennapi életben nagyon sok logikai szerkezetet, kötőszót használunk. Viszont különböző köznyelvi megfogalmazásokban ugyanaz a kötőszó más-más logikai műveletet vezet be. A köznyelvi beszéd és írás logikai szerkezete mögött fontos logikai tartalom van. Ezért ha valaki nem ismeri, vagy nem érti meg a logikai műveletek struktúráját, akkor nem érti meg a kijelentések tartalmát sem, így könnyen félreértelmezi egy adott kijelentés igazságtartalmát. Ezért fontos, hogy a gondolkodást, ezen belül a logikai műveleteket rendszeresen fejlesszük.

10.2. A formális logika elemei – Feladatok

10.1. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi kijelentő mondatok közül melyik tekinthető kijelentésnek a matematikai logika szempontjából! Adjuk meg a kijelentéseknek megfelelő logikai értéket is!

a) Budapest a legszebb főváros Európában.

b) Románia fővárosa Bukarest.

c) Tegnap nagy hőség volt.

d) Nekeresdi Általános Iskola 5. a osztályában Béla március 6.-án jeles dolgozatot írt matematikából.

e) Töröld le a táblát!

f) Miért szürke az elefánt?

g) A Ferencváros színe piros-kék.

h) Végtelen sok prímszám van.

i) Négy egyjegyű prímszám van?

j) Ez a mondat hamis.

k) A tanulók bizonyos mértékegységekkel már az alsó tagozaton megismernek.

l) Budapesten született 1949-ben.

m) Ők a gyárban géplakatosok voltak.

Megoldás. *a)* Ehhez a mondathoz mindenki saját ízlésvilága szerint rendel igaz vagy hamis értéket, így nem tekinthetjük kijelentésnek.

b) Ez a mondat kijelentés, mivel egyértelműen hozzárendelhetjük az igaz logikai értéket .

c) „Tegnap nagy hőség volt” mondat esetében az igazságtartalom hozzárendeléséhez tudnunk kellene, hogy mikor és hol hangzott el a kijelentés valamint, hogy milyen volt ott az időjárás a kijelentést megelőző napon. zen információk nélkül nem tudunk igazságértéket rendelni a mondathoz, így nem tekinthetjük kijelentésnek.

d) Még az ilyen, látszólag jól körülírt kijelentő mondatok sem mindig tekinthetők kijelentésnek. Ezt a mondatot csak akkor tekinthetjük kijelentésnek, ha az illető osztályban egyetlen Béla nevű tanuló van. Ellenkező esetben nem tudjuk, hogy melyik Béláról van szó és így nem tekinthető kijelentésnek.

e) Ez a mondat nem állítás, hanem felszólítás, ezért nincs logikai értéke, vagyis nem tekintjük kijelentésnek.

f) A kérdő mondatokat nem tekintjük kijelentésnek, ezért nincs logikai értéke.

g) Ez a mondat matematikai szempontból kijelentés a logikai értéke hamis, mivel a Ferencváros színe zöld-fehér.

h) Ez a mondat matematikai szempontból kijelentés és logikai értéke igaz.

i) A kérdő mondatokat nem tekintjük kijelentésnek, ezért nincs logikai értéke annak ellenére, hogy a kérdésben megjelenő matematikai tartalomnak a logikai értéke igaz.

j) Ennek az állításnak látszólag létezik logikai értéke. Azonban ha az állítás igaz, akkor a mondatnak (az állításnak) hamisnak kell lennie, ha az állítás hamis, akkor a mondat igaz. Tehát egy olyan ellentmondáshoz jutottunk, amelyhez egyértelműen nem rendelhetünk logikai értéket.

k) Ennek a kijelentésnek a logikai értéke igaz, annak ellenére, hogy a mondatban szereplő „bizonyos mértékegységek" kifejezés nem határolja be azokat a mértékegységeket, amelyeket a tanulók alsó tagozaton tanulnak.

l) Ez a mondat nem tekinthető kijelentésnek, mivel nem ismerjük az egyént, akire az állítás vonatkozik. Megjegyezés: a hiányos kijelentő mondatokat kijelentésnek tekintjük, ha az illető mondat egy szövegkörnyezetbe van ágyazva és ebből kiderül a hiányzó információ.

m) Ez a mondat sem kijelentés, mivel nem tudjuk, hogy a benne szereplő névmás kikre vonatkozik. Amennyiben ez a mondat olyan szövegkörnyezetben szerepel, amelyből egyértelműen kiderül, hogy mit helyettesít a személyesnévmás (Ö), akkor logikai értéket rendelhetünk hozzá. Tehát ebben az esetben kijelentésnek tekinthető.

10.2. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi kijelentések közül melyik egyszerű és melyik összetett kijelentés! Az összetett kijelentések esetében adjuk meg a részkijelentéseket is!

a) A könyvtárban találkoztam azzal a diákkal, akit a folyosón ismertem meg.

b) András elment a moziba és megnézte a filmet.

c) Béla állásinterjúra jelentkezett, de nem jelent meg az adott időpontban.

d) Dénesnek eszébe jutott, hogy bölcs dolog tanulni a matematikát.

e) Az asztalon van egy számológép, de fölösleges használnunk, ha jól számolunk fejben.

f) Csaba sikeresen vizsgázik, és mérnök lesz, vagy külföldön próbál szerencsét.

Megoldás. *a)* A kijelentéseket csak akkor tekintjük összetettnek, ha úgy tudjuk felbontani részkijelentésekre, hogy a részkijelentések mindegyike befolyásolja a teljes kijelentés logikai értékét. A mondatot a következő egyszerű mondattá alakíthatjuk: A könyvtárban találkoztam a folyosón megismert diákkal. Ha a folyosón megismert diákkal tényleg találkoztam a könyvtárban, akkor a kijelentés igaz, ha pedig nem, akkor hamis. Tehát a logikai értéket csak a teljes kijelentés vizsgálatával dönthetjük el. Ezért annak ellenére, hogy ez a mondat nyelvtani értelemben összetett, a matematikai logika szerint egyszerű kijelentésnek minősül.

b) Ez a kijelentés egyértelműen felbontható két részkijelentésre, amelyeknek külön-külön van logikai értéke, azaz mindkettő befolyásolja az összetett kijelentés logikai értékét. Az összetett kijelentés, két részkijelentése: „András elment a moziba” és „András megnézte a filmet”. (Konjunkció, logikai és művelet)

c) Ez a kijelentés is felbontható két állításra, az egyik „Béla állásinterjúra jelentkezett”, a másik „Béla nem jelent meg az adott időpontban.” Ez a két tagmondat is kijelentést, mert igazságérték rendelhető hozzájuk. Az eredeti kijelentés igazságértéke pedig függ a két részkijelentés igazságértékétől. (Konjunkció, logikai és művelet)

d) Bontsuk fel két részre a mondatot! „Dénesnek eszébe jutott,” illetve „Bölcs dolog tanulni a matematikát.” Az első tagmondatnak nincs logikai értéke, azaz ez a mondat nem tekinthető összetett kijelentésnek.

e) A mondat összetett kijelentésnek tekinthető és három részkijelentésből áll. Ezek a következők: „az asztalon van egy számológép”, „fölösleges használnunk” és „jól számolunk fejben. Mindhárom résznek van logikai értéke, azaz az összetett kijelentés logikai értéke függ mindhárom részkijelentés logikai értékétől.

f) Ebben az esetben az összetett mondat megfogalmazása nem egyértelmű és zavart okoz a kijelentés logikai értékének értelmezése. Ez legfőképpen a vesszők elhelyezésének köszönhető, mivel így az összetett mondatot kétféleképpen is értelmezhetjük: „Csaba sikeresen vizsgázik és mérnök is lesz, vagy külföldön próbál szerencsét.” vagy „Csaba sikeresen vizsgázik, és emellett vagy mérnök lesz, vagy külföldön próbál szerencsét.” Mivel nem egyértelmű a logikai szerkezet, ezért nem tudjuk megállapítani, hogy a részkijelentéseket mely logikai műveletek kapcsolják össze. Ezért nem tekinthető összetett kijelentésnek. Összefoglalva: a kijelentéseknek egyértelműen meghatározott logikai szerkezettel kell rendelkezniük. Célszerű az egyértelmű logikai szerkezetre törekednünk a köznyelvi kijelentések használatakor is. Fontos, hogy mondataink egyértelműek legyenek. Ez a tanári tevékenység gyakorlásakor megkülönböztetett jelentőséggel bír.

10.3. Feladat. Logikai kijelentéseknek tekinthetjük-e az alábbi állításokat? Ha igen, akkor mi a logikai értékük

- *a)* Matematikából okos vagyok.
- *b)* A 2022-23-as labdarúgó idény bajnoka a Ferencváros.
- *c)* A Hold zöld színű.
- *d)* A legjobb csapat a Fradi.
- *e)* A majmok repülnek.
- *f)* A 10000 egy nagy szám.

g) Magyarországnak van tengere.

h) A 81 csak a 9-nek a négyzete.

i) András idősebb, mint Béla; Béla idősebb, mint Csaba, és Csaba idősebb, mint András.

j) Hull a hó.

k) Minden téglalap négyzet.

l) Létezik olyan deltoid, ami téglalap.

m) Létezik szürke elefánt?

n) Nem létezik olyan paralelogramma, amely deltoid.

o) Hazádnak rendületlenül légy híve ó magyar!

p) Egyszer volt Budán kutyavásár.

Megoldás. *a)* Nem kijelentés, mivel szubjektív megítélés kérdése, hogy mit jelent okosnak lenni matematikából.

b) Kijelentés, mivel a mondathoz egyértelműen igaz logikai értéket rendelhetünk.

c) Kijelentés, mivel a mondathoz egyértelműen hamis logikai értéket rendelhetünk.

d) Kijelentés, igazságértéke a csapat aktuális bajnokságbeli helyezésétől függ.

e) Kijelentés, igazságértéke hamis.

f) Nem kijelentés, mivel a „nagy szám" fogalom viszonylagos, vagyis megítélés kérdése, hogy mit tekintünk nagynak a számok között.

g) Kijelentés, logikai értéke hamis.

h) Kijelentés, logikai értéke hamis, mivel a 81 nem csak a 9-nek, hanem a -9-nek is a négyzete.

i) Kijelentés, logikai értéke hamis, mivel ellentmondásra jutunk.

j) Kijelentés, logikai értéke a helyszíntől és időponttól függ.

k) Kijelentés. Logikai értéke hamis, mivel létezik olyan téglalap, ami nem négyzet.

l) Kijelentés. Logikai értéke igaz, mivel a négyzet olyan deltoid, amely egyben téglalap is.

m) Nem kijelentés, mivel kérdő mondat.

n) Kijelentés. Logikai értéke hamis, mivel létezik olyan paralelogramma, amely deltoid is, ilyen például a négyzet.

o) Nem kijelentés, mivel felszólító mondat.

p) Kijelentés, a logikai értéke statisztikai adatokból ellenőrizhető. Amennyiben a jól ismert népmesének hinni lehet, akkor a logikai értéke igaz.

10.4. Feladat. Az alábbi mondatok közül melyik egyszerű és melyik összetett kijelentés? Az összetett kijelentések esetében adjuk meg a részkijelentéseket is!

a) András elővette a szemüvegét és elolvasta a feliratot.

b) A forrás olyan tisztáson volt, amelyet bokrok fogtak közre.

c) A másik oldalon volt az ajtó, amely a teraszra vezetett.

d) A szoba közepén íróasztal állt, a sarokban pedig egy állólámpa.

e) Eszembe jutott, hogy van víz a kulacsban.

f) Amikor odamentem és megvizsgáltam kiderült, hogy az ajtó nem volt bezárva.

Megoldás. *a)* Összetett kijelentés. A részkijelentések „András elővette a szemüvegét" és „András elolvasta a feliratot".

b) Egyszerű kijelentés, amely a következőképpen írható át: „A forrás egy bokrok által közrefogott tisztás közepén állt".

c) Egyszerű kijelentés, amely a következőképpen írható át: „A másik oldalon volt a teraszra vezető ajtó".

d) Összetett kijelentés. A részkijelentések „A szoba közepén íróasztal állt" és „A sarokban egy állólámpa állt".

e) Egyszerű kijelentés.

f) Egyszerű kijelentés.

10.5. Feladat. Fogalmazza meg a következő állítások tagadását!

a) Béla tanul.

b) Kedvelem a Ferencvárost.

c) Péter a kijelölt feladatot készítette el.

Megoldás. *a)* Az ítélet tagadása (negációja) „Béla nem tanul", vagy „Nem igaz, hogy Béla tanul", vagy használhatunk többszörös (páratlan számú tagadást. Ebben az esetben a cselekvést kifejező igét tagadjuk a tanul szót.

Fontos kiemelni, hogy lényeges különbség adódik abból, ha a tagadószót az állítmány helyett a hangsúlyos alanyhoz helyezzük. „Nem Béla tanul" kijelentésben lényeges különbség, hogy hordoz egy előfeltevést, amellyel az eredeti kijelentés nem rendelkezik. Konkrétan azt, hogy valaki tanul. Tehát az alany tagadása ebben az esetben nem vezet a kijelentés tagadásához.

b) Az állítás tagadása a „Nem kedvelem a Ferencvárost." Ebben az esetben is az igei szakaszt tagadjuk.

c) Az állítás tagadása a „Péter a kijelölt feladatot nem készítette el", vagy „Péter nem a kijelölt feladatot készítette el", vagy „Nem igaz hogy, Péter a kijelölt feladatot készítette el", vagy „Tagadom, hogy nem igaz, hogy Péter nem a kijelölt feladatot készítette el",

10.6. Feladat. Tekinthető a „Némelyik szám pozitív" kijelentés tagadásának a „Némelyik szám negatív" kijelentés? Válaszunkat indokoljuk!

Megoldás. A „Némelyik szám negatív" kijelentés nem minősül a „Némelyik szám pozitív" negációjának, mivel például a 0 szám esetében mindkét kijelentés hamis.

10.7. Feladat. Jelölje meg az összes olyan állításnak a betűjelét, amely tagadása a következő állításnak: „Van olyan holló, amelyik fehér."

- A: Van olyan holló, amelyik nem fehér.
- B: Egyik holló sem fehér.
- C: Minden holló fehér.
- D: Nem minden holló fehér.

Megoldás. Kezdetben tekintsük az eredeti állítás jelentését, amely szerint létezik fehér holló. Arról nincs tudomásunk, hogy a hollóknak hány százaléka fehér. Ezért lehetséges, hogy csak egy holló fehér, de az is megtörténhet, hogy az összes. Ebből következik, hogy az eredeti állítás akkor hamis, ha egyetlen holló sem fehér. Tehát a B válaszlehetőség az, amely az eredeti állítás igazságértékét „megfordítja".

Egy másik módszer, hogy a „Van olyan. . . " szószerkezetet, vagyis a kvantort tagadjuk, így pedig a „Nem van olyan. . . " kevésbé magyaros szerkezethez jutunk, amelynek a köznyelvi szempontból elfogadhatóbb változata a „Nincs olyan holló, amelyik fehér" kijelentéshez vezet. Ez pedig egyenértékű az „Egyik holló sem fehér" kijelentéssel, vagyis a B válaszlehetőséggel.

10.8. Feladat. Fogalmazzuk meg a következő kijelentések tagadását:

a) Van olyan színes ing, amelynek nincs gallérja.

b) Minden filmet láttam már.

c) Nem félek a matematikától.

d) Létezik olyan négyszög, amelynek belső szögösszege nem 360°.

e) Minden érettségi feladatsorban van nehéz feladat.

f) Egyik 8-cal osztható szám sem osztható 25-tel.

g) Bármely két egyenes metszi egymást.

h) Van olyan diák, amelyiknek minden jegye egyes.

i) A héten volt olyan nap, amikor nem esett az eső.

j) Van olyan tyúk, amely naponta tojik egy tojást.

k) Van olyan holló, amelyik nem fehér.

l) Csapat csak egy van, a Ferencváros.

m) Van olyan költő, akinek minden versében van olyan versszak, amit nem értek.

n) Minden feleletben van legalább egy olyan mondat, amely matematikailag nem helyes.

o) Van olyan nap, amelynek egyetlen percében sem süt a nap.

p) Nincs olyan ország, ahol egyetlen napon sem esik az eső.

Megoldás. *a)* A kijelentés tagadása: „Nincs olyan színes ing, amelynek nincs gallérja". Ezzel ekvivalens a „Minden színes ingnek van gallérja" kijelentés, ez is tekinthető a kijelentés tagadásának.

b) Ebben az esetben a kvantort tagadjuk. Tehát a kijelentés tagadása a „Nem minden filmet láttam" vagy a vele ekvivalens „Van olyan film, amelyet nem láttam" kijelentés.

c) Itt a „nem félek" igei csoportot tagadjuk, tehát a tagadás „Félek a matematikától" kijelentés.

d) Az állítás tagadása a „Nem létezik olyan négyszög, amelynek belső szögösszege nem 360°" vagy a „Minden négyszög belső szögösszege 360°.

e) A kvantort tagadjuk, a kijelentés tagadása „Nem minden érettségi feladatsorban van nehéz feladat" vagy „Van olyan érettségi feladatsor, amelyben nincs nehéz feladat."

f) Az eredeti kijelentés átfogalmazható „Nincs olyan 8-cal osztható szám, amely osztható 25-tel" alakba. Így a tagadása „Van olyan 8-cal osztható szám, amely osztható 25-tel".

g) A kijelentés tagadása „Létezik legalább két egyenes, amely nem metszi egymást".

h) A kijelentés tagadása a „Nincs olyan diák, amelyiknek minden jegye egyes" vagy „Minden diáknak van olyan jegye, amelyik nem egyes".

i) A kijelentés tagadása „A héten nem volt olyan nap, amikor nem esett az eső" vagy „A héten minden nap esett az eső".

j) A kijelentés tagadása „Nincs olyan tyúk, amelyik naponta tojik egy tojást".

k) A kijelentés tagadása „Nincs olyan holló, amelyik nem fehér" vagy „Minden holló fehér".

l) A kijelentés tagadása „Nem csak egy csapat van". Ebben az esetben a Ferencvárost már nem kell kiemelni. Egy másik lehetséges tagadás „A Ferencvároson kívül más csapat is van."

m) A kijelentés tagadása „Nincs olyan költő, akinek minden versében van olyan versszak, amit nem értek."

n) A kijelentés tagadása „Nem minden feleletben van legalább egy olyan mondat, amely matematikailag nem helyes" vagy „Van olyan felelet, amelyben minden mondat matematikailag helyes".

o) A kijelentés tagadása „Nincs olyan nap, amelynek egyetlen percében sem süt a nap" vagy „Mindennap van legalább egy olyan perc, amikor süt a nap".

p) A kijelentés tagadása „Van olyan ország, ahol egyetlen napon sem esik az eső" vagy „Minden országban legalább egy napon esik az eső".

10.9. Feladat. Jelölje meg az összes olyan állításnak a betűjelét, amely tagadása a következő állításnak: „A vállalatnál van olyan alkalmazott, aki nem járt külföldön."

A: A vállalat minden alkalmazottja járt külföldön.

B: A vállalatnál nincs olyan alkalmazott, aki járt külföldön.

C: A vállalatnál nincs olyan alkalmazott, aki nem járt külföldön.

D: A vállalatnál van olyan alkalmazott, aki több napot is járt külföldön.

Megoldás. A helyes válaszlehetőségek az A és a C.

10.10. Feladat. Az alábbi négy kijelentés közül háromnak a tagadása is megtalálható a felsorolt kijelentések között. Melyik ez a három kijelentés és melyiknek mi a tagadása?

a) Van olyan derékszögű háromszög, amelyik egyenlő szárú.

b) Minden derékszögű háromszög egyenlő szárú.

c) Van olyan derékszögű háromszög, amelynek két különböző hosszúságú befogója van.

d) Nem minden derékszögű háromszög egyenlő szárú.

Megoldás. A C és D kijelentések egymással ekvivalensek, a B pedig ezeknek a tagadása. Tehát a felsorolt kijelentések között a B, C és D azok a kijelentések, amelyeknek a tagadása is megtalálható.

A B kijelentés hamis, a C és D kijelentések logikai értéke pedig igaz.

10.11. Feladat. Fogalmazzuk meg az alábbi állítások tagadását! Adjuk meg az állítások és a tagadásaik logikai értékét!

a) Minden páros szám 2-re végződik.

b) Minden egyenlő szárú háromszögnek van két egyenlő szöge.

c) Van olyan 5-tel osztható egész szám, amely nem nullára végződik.

Megoldás. *a)* A kijelentés tagadása „Nem minden páros szám végződik 2-re" vagy „Van olyan páros szám, amely nem 2-re végződik." Az eredeti állítás hamis, a tagadása igaz.

b) Az állítás tagadása „Nem minden egyenlő szárú háromszögnek van két egyenlő szöge" vagy „Van olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek nincs két egyenlő szöge". Az eredeti állítás igaz, a tagadása hamis.

c) Az állítás tagadása „Nincs olyan 5-tel osztható egész szám, amely nem nullára végződik" vagy „Minden 5-tel osztható egész szám nullára végződik". Az eredeti kijelentés igaz, a tagadása hamis.

10.12. Feladat. Az alábbi kijelentések közül melyek fejeznek ki konjunkciót? Vizsgálja meg a kijelentésekben szereplő részkijelentéseket!

a) András és Béla elsőévesek.

b) András és Béla osztálytársak.

c) Csaba egy tanár, bár másodállásban árufeltöltőként dolgozik.

d) Dénes megbukik a vizsgán, de legalábbis elégségesnél nem kap jobb jegyet.

e) Romeó és Júlia szerették egymást.

f) Szeretem a matematikát, de nem kedvelem az irodalmat.

Megoldás. *a)* A mondatban szereplő részkijelentések „András elsőéves" és „Béla elsőéves". Az összetett kijelentés pontosan akkor igaz, ha a részkijelentések igazak (és fordítva, ha az összetett kijelentés igaz, akkor a részkijelentések is igazak). Ezért az összetett kijelentés konjunkciót fejez ki.

b) A mondatban szereplő részkijelentések „András osztálytárs" és „Béla osztálytárs". Viszont ezek a „részkijelentések" nem használhatók önállóan, tehát az összetett kijelentés nem fejez ki konjunkciót.

c) A mondatban szereplő részkijelentések „Csaba egy tanár" és „Csaba másodállásban árufeltöltőként dolgozik", az összetett kijelentés pedig konjunkciót fejez ki.

d) A mondatban szereplő részkijelentések „Dénes megbukik a vizsgán" és „Dénes elégségesnél nem kap jobb jegyet". Az összetett kijelentés akkor is igaz lehet, ha csak az egyik részkijelentés (Dénes megbukik a vizsgán) teljesül. Ezért az összetett kijelentés nem fejez ki konjunkciót.

e) A két „részkijelentés" nem használható önállóan, ezért a kijelentés nem fejez ki konjunkciót.

f) A mondatban szereplő részkijelentések „Szeretem a matematikát" és „Nem kedvelem az irodalmat". Az összetett kijelntés konjunkciót fejez ki.

10.13. Feladat. Tekinthető-e a „Béla tanul" kijelentés kettős tagadásának a „Nem Béla nem tanul" kijelentés? Válaszát indolkolja!

Megoldás. A „Nem Béla nem tanul" kijelentés nem tekinthető a „Béla tanul" kijelentés kettős tagadásának. Ez azzal magyarázható, hogy a $\neg(\neg A)$ alakú kijelentés a pótlás törvénye alapján mindig helyettesíthető az A kijelentéssel anélkül, hogy mondanivalónk megváltozna. Ebben az esetben viszont a kétszeresen tagadott mondat mégsem teljesen azonos jelentésű a tagadás nélkülivel, mivel hordoz egy előfeltevést: Valaki nem tanul.

10.14. Feladat. Tekintsük a következő kijelentést: „A feladatot megoldhatónak tartom." Fogalmazzon meg olyan állításokat, amelyek az állítás kettős tagadásának tekinthetők. Keressen példákat háromszoros, négyszeres stb. tagadásra is!

Megoldás. Az állítás egyszeres tagadása lehet A feladatot megoldhatatlannak tartom kijelentés. Ebből kiindulva a kétszeres tagadás különböző formái:

„A feladatot nem tartom megoldhatatlannak."

„Nem igaz, hogy megoldhatatlannak tartom a feladatot."

„Nem tartom nem megoldhatónak a feladatot."

A hármas tagadás a következő: „Nem igaz, hogy nem tartom megoldhatatlannak a feladatot."

A négyes tagadás: „Nem igaz, hogy nem tartom nem megoldhatatlannak a feladatot."

Megjegyzés. A további, azaz ötszörös, hatszoros, stb. tagadások köznyelvi megfogalmazása egyre körülményesebb, esetleg vicces fordulatokat is tartalmazhat.

10.15. Feladat. Tekinthető-e kétszeres tagadásnak a „Nem láttam senkit." kijelentés? Válaszát indokolja!

Megoldás. A kijelentés logikailag nem tekinthető például a „Láttam valakit" kétszeres tagadásának, mivel a kétszeresen tagadott mondat nem ekvivalens az eredeti kijelentéssel. A magyar nyelvben találkozhatunk olyan kétszeres (vagy akár többszörös) tagadással, amellyel a tagadás nyomatékosítását fejezzük ki.

10.16. Feladat. Hányszoros tagadásnak minősül a Senki senkinek semmit nem mondott kijelentés? Válaszát indokolja!

Megoldás. A kijelentés egyszeres tagadásnak minősül, annak ellenére, hogy több tagadó kvantor van a mondatban.

10.17. Feladat. Tekinthető-e a „Rég nem ettem ilyen finomat." kijelentés a „Rég ettem ilyen finomat." kijelentés tagadásának? Válaszát indokolja!

Megoldás. A „Rég nem ettem ilyen finomat." kijelentés nem tekinthető a ..Rég ettem ilyen finomat." kijelentés tagadásának, mivel mindkét kijelentés ugyanazt jelenti. Nyelvi megközelítésben ilyenkor fölös tagadásról beszélünk.

10.18. Feladat. Adott a következő kijelentés: „Az autó megcsúszott a jégen, és nekiment egy fának." Ez a kijelentés konjunkció-e? Tanulmányozza a művelet kommutativitását! Válaszát indokolja!

Megoldás. Az összetett kijelentés pontosan akkor igaz, ha a részkijelentések igazak (és fordítva, ha az összetett kijelentés igaz, akkor a részkijelentések is igazak). Ezért az összetett kijelentés konjunkció. Az egyik kijelentés: „megcsúszott a jégen", a másik: „nekiment egy fának".

A konjunkció kommutatív művelet, és kijelentés a megfordítása: *Az autó nekiment egy fának, miután megcsúszott a jégen.*

Megjegyzés. Nem életszerű a kijelentés megfordítása a következőképpen: *Az autó nekiment egy fának, és megcsúszott a jégen.* vagy *Az autó nekiment egy fának, mert megcsúszott a jégen.*

10.19. Feladat. Adott a következő kijelentés: „A Fradi játéka nem volt látványos, csupán eredményes." Milyen logikai műveletet fejez ki? Fogalmazza meg a kijelentés megfordítását és döntse el, hogy a kijelentés kommutatív-e vagy sem!

Megoldás. A kijelentés konjunkciót fejez ki. A kijelentés megfordítása a A Fradi játéka eredményes volt, de nem szép. vagy A Fradi játéka eredményes volt és nem szép. A kijelentés kommutatív.

10.20. Feladat. Mely kijelentések ekvivalensek egymással?

A: Senki sem ment el, aki Sanyinak hiányzott volna.

B: Aki elment, Sanyinak nem hiányzott.

C: Itt van a kutya elásva.

D: Aki Sanyinak hiányzott nem ment el.

E: Ha soha nem indulsz el, nem jutsz el sehová.

F: Ha valamikor elindulsz, akkor eljutsz valahová.

G: Ha nem jutsz el sehová, akkor el sem indulsz.

H: Ezen a helyen hantolták el az ebet.

Megoldás. Az $A \to B = \neg B \to \neg A$ összefüggést a **kontrapozició törvényének**, míg az átalakított formát az eredeti kijelentés **transzponáltjának** nevezzük.

$F = G$ a kontrapozíció törvénye alapján.

$B = D$ a kontrapozíció törvénye alapján.

$A = D$, ugyanaz a jelentésük, más megfogalmazásban.

$A = B$ a fentiekből az ekvivalencia tranzitivitása miatt.

$C = H$ ugyanaz a jelentésük, más megfogalmazásban.

10.21. Feladat. Milyen műveletet fejez ki a vagy kötőszó az alábbi kijelentésekben?

a) András vagy Béla nyeri a kettejük közötti párbajt.

b) Ön dönt: alkoholt fogyaszt vagy vezet.

c) A nyári vakációban horgászok vagy túrázok.

d) Holnap 10 órakor moziba megyek vagy elsétálok a Városligetbe.

e) A Fradi vagy a Vasas lesz a bajnok.

f) Az x szám 3-mal vagy 5-tel osztható.

g) Annát vagy Beát veszem feleségül.

h) Áldjon vagy verjen sors keze: Itt élned, halnod kell.

Megoldás. *a)* Kizáró vagy (Zsegalkin művelet), mivel csak egyikük nyerheti meg a párbajt.

b) Összeférhetetlenséget kifejező vagy (Scheffer művelet), mivel egy harmadik lehetőség is fennáll (se nem iszik, se nem vezet).

c) Megengedő vagy (diszjunkció), mivel a viszonylag hosszú időintervallumban mindkét cselekvésre sor kerülhet.

d) Kizáró vagy, mivel az adott időpontban nem kerülhet sor mindkét cselekvésre.

e) Az adott helyzettől függ. Ha más csapatnak már nincs esélye (a bajnokság állása alapján), akkor Zsegalkin-művelet. Ha pedig más esélyes is van, akkor Sheffer-művelet.

f) Megengedő vagy, mivel x lehet 15 többszöröse is (vagyis 3-mal és 5-tel is osztható).

g) Az adott helyzettől függ. Ha csak Anna és Bea a két lehetséges „feleségjelölt”, akkor Zsegalkin művelet. Ha más lány is lehet a képben, akkor Sheffer-művelet.

h) Az előzményként vagy feltételként közölt ellentétes állítások, lehetőségek közül bármelyik teljesül, a következmény ugyanazt a logikai értéket hordozza magában. Ezért itt nem lényeges a „vagy” kötőszó megengedő vagy kizáró jellege. Tehát ebben az esetben nem tudunk egyértelműen logikai műveletet rendelni a vagy kötőszóhoz.

10.22. Feladat. Mit kell tennie Andrásnak ahhoz, hogy igaza legyen? Keressük meg az összes lehetőséget!

a) Reggel megtanulom a verset és megoldom a matematika feladatot, vagy elolvasom a novellát.

b) Elmegyek a Fradi meccsre, és szurkolok vagy unatkozom.

c) Nem nézem a tévét vagy nem játszom a számítógépen, és alszom.

d) Reggelire vajas kenyeret és kakaót készítek, és a Kossuth rádiót hallgatom.

e) Elmegyek a szüreti bálba és táncolok, vagy otthon maradok.

Megoldás. *a)* Az összetett kijelentés logikailag formalizálva $(A \wedge B) \vee C$, ahol az elemi kijelentések:

A: Reggel megtanulom a verset."

B: Megoldom a matematika feladatot."

C: Elolvasom a novellát."

A lehetséges válaszok a következők:

– Megtanulja a verset. Megoldja a matematika feladatot. Elolvassa a novellát.

– Nem tanulja meg a verset. Megoldja a matematika feladatot. Elolvassa a novellát.

– Megtanulja a verset. Nem oldja meg a matematika feladatot. Elolvassa a novellát.

– Nem tanulja meg a verset. Nem oldja meg a matematika feladatot. Elolvassa a novellát.

– Megtanulja a verset. Megoldja a matematika feladatot. Nem olvassa el a novellát.

b) Az összetett kijelentés logikailag formalizálva $A \wedge (B \vee C)$, ahol az elemi kijelentések:

A: Elmegyek a Fradi meccsre."

B: Szurkolok."

C: Unatkozom."

A lehetséges válaszok a következők:

– Elmegy a Fradi meccsre. Szurkol. Unatkozik.

– Elmegy a Fradi meccsre. Nem szurkol. Unatkozik.

– Elmegy a Fradi meccsre. Szurkol. Nem unatkozik.

c) Az összetett kijelentés logikailag formalizálva $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$, ahol az elemi kijelentések:

A: Nézem a tévét."

B: Játszom a számítógépen."

C: Alszom."

A lehetséges válaszok a következők:

– Nem nézi a tévét. Nem játszik a számítógépen. Alszik.

– Nézi a tévét. Nem játszik a számítógépen. Alszik.

– Nem nézi a tévét. Játszik a számítógépen. Alszik.

Megjegyzés. A cselekvéseket nyilvánvalóan nem egyszerre végzi, hanem egy adott időintervallumon belül.

d) Az összetett kijelentés logikailag formalizálva $(A \wedge B) \wedge C$, ahol az elemi kijelentések:

A: Reggelire vajas kenyeret készítek."

B: Reggelire kakaót készítek."

C: A Kossuth rádiót hallgatom."

Az egyetlen lehetséges válasz:

– Vajas kenyeret készít. Kakaót készít. A Kossuth rádiót hallgatja.

e) Az összetett kijelentés logikailag formalizálva $(A \wedge B) \nabla C$, ahol az elemi kijelentések:

A: Elmegyek a szüreti bálba."

B: Táncolok."

C: Otthon maradok."

A lehetséges válaszok a következők:

– Elmegy a szüreti bálba. Táncol. Nem marad otthon.

– Nem megy el a szüreti bálba. Táncol. Otthon marad.

– Elmegy a szüreti bálba. Nem táncol. Otthon marad.

– Nem megy el a szüreti bálba. Nem táncol. Otthon marad.

10.23. Feladat. A De Morgan azonosságok segítségével fogalmazza át a következő kijelentéseket:

a) Nem igaz, hogy András jól focizik és kosarazik.

b) Nem igaz, hogy Béla jól fest, és hegedül.

c) Nem igaz, hogy a tegnap színházban vagy moziban voltál.

d) Nem vagyok okos és nem vagyok főispán.

e) Nem megyek Ausztráliába és nem látok kengurut.

Megoldás. *a)* András nem jól focizik, vagy nem jól kosarazik.

Megjegyzés. Ebben az esetben a két elemi kijelentés András jól focizik, illetve András jól kosarazik.

b) Béla nem jól fest, vagy nem hegedül.

Megjegyzés. Ebben az esetben a két elemi kijelentés Béla jól fest, illetve Béla hegedül.

c) A tegnap nem voltál moziban és nem voltál színházban.

Vagy: A tegnap sem színházban, sem pedig moziban nem voltál.

d) Okos vagyok vagy főispán.

e) Ausztráliába megyek vagy kengurut látok.

10.24. Feladat. Fogalmazzák meg az állítások tagadását. Állapítsák meg az állítások és a megfelelő tagadások logikai értékét!

a) Minden trapéznak van párhuzamos oldalpárja és minden szöge különböző.

b) Van olyan deltoid, amelynek minden szöge különböző.

c) Létezik négyzet, amelynek minden oldala vagy területe egységnyi.

Megoldás. *a)* Az állítás tagadása: „Nem minden trapéznak van párhuzamos oldalpárja és minden szöge különböző.” Vagy „Van olyan trapéz, amelynek nincs párhuzamos oldalpárja vagy nem minden szöge különböző.”

Az állítás hamis, a tagadása igaz.

b) Az állítás tagadása: „Nincs olyan deltoid, amelynek minden szöge különböző.”

Az állítás hamis, a tagadása igaz.

c) Az állítás tagadása: „Nincs olyan négyzet, amelynek minden oldala vagy területe egységnyi.” Vagy „Létezik olyan négyzet, amelynek nem minden oldala egységnyi és területe sem egységnyi.”

Az állítás igaz, a tagadása hamis.

10.25. Feladat. Értékeljük ki a következő kijelentések logikai értékét minden lehetséges esetben logikai táblázat segítségével:

a) Nem igaz, hogy ha András sokat dolgozik és keveset keres, akkor boldog.

b) Ha a bajnokcsapat zászlaja nem zöld-fehér, akkor ostoba vagy színvak vagyok.

c) Moziba megyek, vagy fagyizok és nem sétálok.

d) A buszos kiránduláson nem unatkozom, vagy elalszom és álmodok.

e) Esik a hó, és fázom vagy szaladok.

Megoldás. *a)* Az elemi kijelentések:

A: András sokat dolgozik."

B: András keveset keres."

C: András boldog."

Az összetett kijelentés: $\neg((A \wedge B) \rightarrow C)$.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$\neg((A \wedge B) \rightarrow C)$
i	i	i	i	i	h
i	i	h	i	h	i
i	h	i	h	i	h
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	h
h	i	h	h	i	h
h	h	i	h	i	h
h	h	h	h	i	h

b) Az elemi kijelentések:

A: A bajnokcsapat zászlaja zöld-fehér."

B: Ostoba vagyok."

C: Színvak vagyok."

Az összetett kijelentés: $\neg A \rightarrow (B \vee C)$.

A	B	C	$\neg A$	$B \vee C$	$\neg A \rightarrow (B \vee C)$
i	i	i	h	i	i
i	i	h	h	i	i
i	h	i	h	i	i
i	h	h	h	h	i
h	i	i	i	i	h
h	i	h	i	i	h
h	h	i	i	i	h
h	h	h	i	h	i

c) Az elemi kijelentések:

A: Moziba megyek.”

B: Fagyizok.”

C: Sétálok.”

Az összetett kijelentés: $A \vee (B \wedge \neg C)$.

A	B	C	$\neg C$	$B \wedge \neg C$	$A \vee (B \wedge \neg C)$
i	i	i	h	h	i
i	i	h	i	i	i
i	h	i	h	h	i
i	h	h	i	h	i
h	i	i	h	h	h
h	i	h	i	i	i
h	h	i	h	h	h
h	h	h	i	h	h

d) Az elemi kijelentések:

A: Unatkozom.”

B: Elalszom.”

C: Álmodok.”

Az összetett kijelentés: $\neg((A \wedge B) \rightarrow C)$.

A	B	C	$\neg A$	$B \wedge C$	$\neg A \vee (B \wedge C)$
i	i	i	h	i	i
i	i	h	h	h	h
i	h	i	h	h	h
i	h	h	h	h	h
h	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i
h	h	i	i	h	i
h	h	h	i	h	i

e) Az elemi kijelentések:

A: Esik a hó.”

B: Fázom.”

C: Szaladok.”

Az összetett kijelentés: $A \wedge (B \vee C)$

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$
i	i	i	i	i
i	i	h	i	i
i	h	i	i	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	h
h	i	h	i	h
h	h	i	i	h
h	h	h	h	h

10.26. Feladat. Fogalmazzuk meg a következő kijelentések negációját!

a) Volt könnyű feladat is, és azokat oldottam meg.

b) Minden feladat könnyű volt, és mindegyiket meg is oldottam.

c) A Ferencváros zöld-fehér, a Vasas pedig piros-kék.

d) A cukrászdában minden süti finom, vagy nem mindegyiket kóstoltuk meg.

e) Van olyan háromszög, amelynek két tompaszöge van.

f) Minden pedagógus lelkesen tanít, és a lakbért készpénzben fizeti.

g) Van fehér macska és minden holló fekete.

h) Nem voltam külföldön vagy tengerparton, és a Balatonon nyaraltam.

Megoldás. *a)* Nem volt könnyű feladat, vagy azokat nem oldottam meg.

b) Nem minden feladat volt könnyű, vagy nem mindegyiket oldottam meg.

c) A Ferencváros nem zöld-fehér, vagy a Vasas nem piros-kék.

d) A cukrászdában nem minden süti finom, és mindegyiket megkóstoltuk.

e) Nincs olyan háromszög, amelynek két tompaszöge van.

f) Nem minden pedagógus tanít lelkesen, vagy nem készpénzben fizeti a lakbért.

g) Nincs fehér macska és nem minden holló fekete.

h) Voltam külföldön és tengerparton, vagy a Balatonon nyaraltam.

10.27. Feladat. Az A, B, C és D kijelentéseknek adjon logikai értékeket úgy, hogy a következő összetett kijelentések értéke hamis legyen. Keressen minél egyszerűbb megoldást!

a) $(\neg(A \wedge B) \vee C) \wedge D$

b) $A \vee B \vee C \vee D$

c) $A \wedge (B \vee \neg A)$

d) $\neg(A \wedge B) \wedge (C \vee D)$

e) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

f) $A \vee (B \wedge \neg A)$

Megoldás. *a)* Elegendő, ha a D hamis. Így az egyik legegyszerűbb megoldás: A igaz, B igaz, C igaz, D hamis.

b) Szükséges, hogy az összes kijelentés logikai értéke hamis legyen, tehát az egyetlen megoldás: A hamis, B hamis, C hamis, D hamis.

c) A hamis, B értéke pedig tetszőleges lehet.

d) Első megoldás: A és B egyszerre igaz, ekkor C és D logikai értéke tetszőleges lehet.

Második megoldás: C és D egyszerre hamis, ekkor A és B logikai értéke tetszőleges lehet.

e) Első megoldás: A és B egyszerre hamis, ekkor C és D logikai értéke tetszőleges lehet.

Második megoldás: C és D egyszerre hamis, ekkor A és B logikai értéke tetszőleges lehet.

f) Szükséges hogy A hamis legyen, ekkor viszont $\neg A$ igaz, így B értéke hamis kell legyen. Tehát a megoldás: A hamis és B hamis.

10.28. Feladat. Értékeljük igazságtáblázat segítségével a következő formulákat:

a) $A \wedge \neg B$

b) $(A \wedge B) \vee \neg A$

c) $A \wedge (B \vee \neg A)$

d) $\neg(A \wedge B) \vee C$

e) $\neg A \wedge (B \vee C)$

Megoldás. Az *a)-c)* alpontoknak megfelelő megoldásokat a következő táblázat tartalmazza:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee \neg A$	$A \wedge (B \vee \neg A)$
i	i	h	h	h	i	i
i	h	h	i	i	h	h
h	i	i	h	h	i	h
h	h	i	i	h	i	h

A *d)-e)* alpontoknak megfelelő megoldásokat a következő táblázat tartalmazza:

A	B	C	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B) \vee C$	$\neg A$	$B \vee C$	$\neg A \wedge (B \vee C)$
i	i	i	h	i	h	i	h
i	i	h	h	h	h	i	h
i	h	i	i	i	h	i	h
i	h	h	i	i	h	h	h
h	i	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	i	i	i	i
h	h	i	i	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i	h	h

10.29. Feladat. Minden alpont esetében a következő elemi kijelentésekkel dolgozunk:

A: Sanyinak sikerül a dolgozata

B: Sanyi megkapja/megkapta az ötöst

Írja fel logikai jelekkel a következő kijelentéseket és töltsék ki az igazságtáblázatukat!

a) Ha Sanyinak sikerül a dolgozata, megkapja az ötöst.

b) Ha Sanyinak nem sikerül a dolgozata, nem kapja meg az ötöst.

c) Ha Sanyi megkapta az ötöst, akkor sikerült a dolgozata.

d) Ha Sanyi nem kapta meg az ötöst, akkor nem sikerült a dolgozata.

Megoldás. *a)* Az összetett kijelentés: $A \rightarrow B$.

b) Az összetett kijelentés: $\neg A \rightarrow \neg B$.

c) Az összetett kijelentés: $B \rightarrow A$.

d) Az összetett kijelentés: $\neg B \rightarrow \neg A$.

10.30. Feladat. Formalizálják a következő kijelentéseket! Írják fel a kijelentések tagadását, és formalizálják ezeket is!

a) Csak akkor győzünk, ha sok edzésen veszünk részt.

b) A tudomány biztos eredményekkel szolgál, feltéve, ha jól értelmezzük a tényeket.

c) Kirándulni megyünk, kivéve, ha esik az eső.

d) Feltéve, hogy a jó úton haladunk, estére odaérünk.

e) A csapat győz, ha több gólt rúg, mint az ellenfél.

f) A motor beindul, kivéve, ha nincs benzin a tartályban.

Megoldás. *a)* Az elemi kijelentések: p: „Győzünk." q: „Sok edzésen veszünk részt." Az összetett kijelentés: $q \leftrightarrow p$.

b) Az elemi kijelentések: p: „A tudomány biztos eredményekkel szolgál." q: „Jól értelmezzük a tényeket." Az összetett kijelentés: $q \to p$.

c) Az eredeti kijelentéssel ekvivalens az „Akkor és csakis akkor megyünk kirándulni ha nem esik az eső." kijelentés. Az elemi kijelentések: p: „Kirándulni megyünk." q: „Esik az eső." Az összetett kijelentés: $p \leftrightarrow \neg q$.

d) Az elemi kijelentések: p: „A jó úton haladunk." q: „Estére odaérünk." Az összetett kijelentés: $p \to q$.

e) Az elemi kijelentések: p: „A csapat győz." q: „A csapat több gólt rúg, mint az ellenfél." Az összetett kijelentés: $q \to p$.

f) Az elemi kijelentések: p: „A motor beindul." q: „A tartályban van benzin." Az összetett kijelentés: $p \leftrightarrow \neg q$.

10.31. Feladat. Írja fel logikai jelekkel az alábbi kijelentéseket:

a) Ha ünnepnap van, akkor a tanítás szünetel.

b) A tanítás nem ér véget délben, pedig ünnepély vagy osztályfőnöki óra lesz.

c) Esik az eső, bár süt a Nap.

d) Ha esik az eső és süt a nap, akkor szivárvány van.

e) A Ferencváros bajnok lesz, ha a legjobb csapat végez az első helyen.

f) Ha idejében felébredek, akkor elérem a buszt, és megérkezem nyolc órára.

Megoldás. *a)* Az elemi kijelentések: p: „Ünnepnap van." q: „A tanítás szünetel." Az összetett kijelentés: $p \to q$

b) Az elemi kijelentések: p: „A tanítás véget ér délben." q: „Ünnepély lesz." r: „Osztályfőnöki óra lesz". Az összetett kijelentés: $\neg p \land (q \lor r)$.

c) Az elemi kijelentések: p: „Esik az eső." q: „Süt a nap." Az összetett kijelentés: $p \land q$.

d) Az elemi kijelentések: p: „Esik az eső." q: „Süt a nap." r: „Szivárvány van." Az összetett kijelentés: $(p \land q) \to r$.

e) Az elemi kijelentések: p: „A Ferencváros bajnok lesz." q: „A legjobb csapat végez az első helyen." Az összetett kijelentés: $q \to p$.

f) Az elemi kijelentések: p: „Idejében felébredek.” q: „Elérem a buszt.” r: „Megérkezem nyolc órára.” Az összetett kijelentés: $(p \to q) \wedge r$

10.32. Feladat. Alakítsák implikációvá, a megfelelő műveleti tulajdonságok felhasználásával, a következő kijelentéseket! Fogalmazzák meg a Ha…, akkor… kötőszavak használatával!

a) Vagy alszanak, vagy süketek.

b) Vagy elment, vagy nyitva van az ajtó.

c) Vagy nyitva van az ablak, vagy nincsenek itthon.

d) Vagy nem férfi volt a tettes, vagy András volt az.

Megoldás. *a)* Az elemi kijelentések: p: „Alszanak.” q: „Süketek.” A $p \to q = \neg p \vee q$ azonosságból kiindulva az eredeti kijelentés implikációt tartalmazó alakban felírva: „Ha nem alszanak, akkor süketek.”

Megjegyzés. Mivel a kizáró vagy kommutatív, ezért a következő átalakítás is helyes: „Ha nem süketek, akkor alszanak.”

b) Az átalakított kijelentés: Ha nem ment el, akkor nyitva van az ajtó vagy Ha nincs nyitva az ajtó, akkor elment.

c) Az átalakított kijelentés: Ha nincs nyitva az ablak, akkor nincsenek itthon vagy Ha itthon vannak, akkor nyitva van az ablak.

d) Az átalakított kijelentés: Ha férfi volt a tettes, akkor András volt az vagy Ha nem András volt, akkor nem férfi volt a tettes.

10.33. Feladat. Döntsük el az állítások és a megfordításuk logikai értékét:

a) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az paralelogramma.

b) Ha egy háromszög súlypontja a háromszögön kívülre esik, akkor a magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

c) Ha egy függvénynek van zérushelye, akkor grafikonja metszi az y tengelyt.

d) Ha egy természetes szám osztható 5-tel, akkor osztható 15-tel is.

Megoldás. *a)* Az állítás megfordítása: „Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.” Az állítás igaz, a megfordítása is igaz.

b) Az állítás megfordítása: „Ha egy háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást, akkor a súlypontja a háromszögön kívülre esik.” Az állítás igaz, a megfordítása hamis.

c) Az állítás megfordítása: „Ha egy függvény grafikonja metszi az y tengelyt, akkor van zérushelye.” Az állítás hamis, a megfordítása is hamis.

d) Az állítás megfordítása: „Ha egy szám osztható 15-tel, akkor osztható 5-tel is.” Az állítás hamis, a megfordítása igaz.

10.34. Feladat. Fogalmazza át a következő kijelentéseket a kontrapozíció törvényének segítségével!

a) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor egyúttal rombusz is.

b) Ha süt a nap, nem látszanak a csillagok.

c) Ha egy szám nullára végződik, akkor osztható 5-tel.

d) Ha nem fúj a szél, nem forog a dorozsmai szélmalom.

e) Ha egy asszony a vejével társalog, akkor méltatlankodik.

Megoldás. *a)* „Ha egy négyszög nem rombusz, akkor nem is paralelogramma.”

b) „Ha látszanak a csillagok, akkor nem süt a nap.”

c) „Ha egy szám nem osztható 5-tel, akkor nem nullára végződik.”

d) „Ha forog a dorozsmai szélmalom, akkor fúj a szél.”

e) „Ha egy asszony nem méltatlankodik, akkor nem a vejével társalog.”

10.35. Feladat. Írják fel logikai műveletekkel a következő kijelentéseket. A műveleti tulajdonságok alapján fogalmazzanak meg ezekkel a kijelentésekkel ekvivalens kijelentéseket is:

a) Ha egy szám osztható 10-zel, akkor az utolsó számjegye 0, és ha az utolsó számjegye 0, akkor osztható 10-zel.

b) Ha nyerek a lottón, akkor elmegyek Hajdúszoboszlóra, ha pedig nem nyerek, akkor nem megyek el.

c) Ha Péter nem kap egyest, akkor megdicsérik, de ha egyest kap, akkor nem.

d) András akkor és csak akkor késik el a színházból, ha előtte úszni megy.

e) Akkor és csak akkor lesz kemény a tél, ha az indiánok egész nyáron gyűjtik a fát.

f) András vagy elkésett a színházból, vagy nem volt úszni.

g) Akkor és csak akkor nem táncolnak, ha nem szól a zene.

h) A Ferencváros akkor és csakis akkor lesz bajnok, ha nem kap ki a Kecskeméttől.

Megoldás. *a)* Az elemi kijelentések: A: „Egy szám osztható 10-zel.” B: „A szám utolsó számjegye 0.”

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

b) Az elemi kijelentések: A: „Nyerek a lottón.” B: „Elmegyek Hajdúszoboszlóra.”

$$(A \to B) \wedge (\neg B \to \neg A)$$

c) Az elemi kijelentések: A: „Péter egyest kap.” B: „Pétert megdicsérik.”

$$(\neg A \to B) \wedge (A \to \neg B)$$

d) Az elemi kijelentések: A: „András elkésik a színházból.” B: „András előadás előtt úszni megy.”

$$A \leftrightarrow B$$

e) Az elemi kijelentések: A: „Kemény lesz a tél.” B: „Az indiánok egész nyáron gyűjtik a fát.”

$$A \leftrightarrow B$$

f) Az elemi kijelentések: A: „A Ferencváros bajnok lesz.” B: „A Ferencváros kikap a Kecskeméttől.”

$$A \leftrightarrow \neg B$$

10.36. Feladat. Igazoljuk igazságtáblázattal, hogy:

a) $A \to B = \neg A \vee B$

b) $A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$

c) $A \to B = \neg B \to \neg A$

d) $(A \to B) \to C = (\neg A \to C) \wedge (B \to C)$

Megoldás. *a)*

A	B	$\neg A$	$A \to B$	$\neg A \vee B$
i	i	h	i	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	i
h	h	i	i	i

b)

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \land (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
i	i	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	i	h	h	h
h	h	i	i	i	i

c)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$
i	i	h	h	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	i	i	i

d)

A	B	C	$A \to B$	$(A \to B) \to C$	$\neg A \to C$	$B \to C$	$(\neg A \to C) \land (B \to C)$
i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	i	h	h
i	h	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	i	i	i
h	i	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	h	h	h
h	h	i	i	i	i	i	i
h	h	h	i	h	h	i	h

10.37. Feladat. Tekintsük a következő kijelentéseket:

A: Esik az eső

B: Fúj a szél

C: Jól felöltözöm.

Írják fel logikai műveletekkel a következő kijelentéseket:

a) Ha esik az eső, akkor fúj a szél.

b) Ha fúj a szél, akkor esik az eső.

c) Akkor és csak akkor fúj a szél, ha jól felöltözöm.

d) Ha jól felöltözöm és esik az eső, akkor fúj a szél.

e) Ha nem esik az eső, akkor jól felöltözöm és fúj a szél.

f) Nem igaz, hogy ha fúj a szél, akkor jól felöltözöm.

g) Nem igaz, hogy esik az eső és fúj a szél.

h) Nem öltözöm fel, és nem esik az eső vagy fúj a szél.

Megoldás. *a)* $A \to B$

b) $B \to A$

c) $B \leftrightarrow C$

d) $(C \wedge A) \to B$

e) $\neg A \to (C \wedge B)$

f) $\neg(B \to C)$

g) $\neg(A \wedge B)$

h) $\neg C \wedge (\neg A \vee B)$

Hivatkozások

[1] Balogh J., Hader L., Keszler B., Kugler N., Laczkó K., Lengyel K., Magyar Grammatika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[2] Csapó Benő, Csirikné Czachesz Erzsébet, Vidákovich Tibor, A nyelvi-logikai műveletrendszer fejlettsége 14 éves korban, Pszichológia 1987, (7), 4, 521–544

[3] Fülöp Zsolt, A nyelvi-műveleti rendszer fejlettségének vizsgálata háromváltozós kijelentések esetében, Szakmódszertani és más pedagógiai tanulmányok, International Research Institute s.r.o. Komarno, 2022.

[4] Fülöp Zsolt, Feladatmegoldási módszerek összehasonlító vizsgálata a pedagógus, illetve a diák rendelkezésére álló ismeretek birtokában, Doktori értekezés, Bolyai Intézet, Szeged, 2017.

[5] Fülöp Zsolt, Mathematics in Language, Practice and Theory in Systems of Education, 9. évf. 2. sz., 2014.

[6] Fülöp Zsolt, A formális logikai gondolkodás fejlettségének vizsgálata pedagógusképzésben résztvevő hallgatók esetében, Pedagógiai változások, a változás pedagógiája IV, Budapest, 2022.

[7] Grice, H. Paul, Logic and Conversation, Vol. 3, Speech Acts, Academic Press, New York, 1975.

[8] Jászó A., A magyar nyelv könyve, Trezor Kiadó, Budapest, 1997.

[9] Kelemen László, A gondolkodás nevelése az általános iskolában, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[10] É. Kiss K., Kiefer F., Siptár P., Új magyar nyelvtan, Osiris, 1998.

[11] Nagy József, A rendszerező képesség kritériumorientált feltárása, Magyar Akadémia, 103., 3. sz., 2003.

[12] Piaget, Jean, Válogatott tanulmányok, Gondolat Kiadó, Budapest, 1970.

[13] Ruzsa Imre, Klasszikus, modális és intenzionális logika, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.

[14] Szalay István, Hollistic aproach to the teaching of Mathematics, Practice and Theory in Systems of Education, 5. Évf. 1. sz., 2010.

[15] Tallér József, A logika alapjai, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1996.

[16] Vidákovich Tibor, Diagnosztikus pedagógiai értékelés, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1990.